

- Elie Azoulay - Jean Avignant - Guy Auliac -

LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE

1^{re} année • Tome 1

MIAS • MASS • SM

Cours + exos

Un cours pédagogique

Des exemples pour comprendre

220 exercices corrigés pour s'entraîner

Des résumés pour mémoriser ce qu'il faut savoir

3^e édition de
Mathématiques
Deug Sciences 1

EdiScience

M 562/T₂

LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE

Cours et exercices résolus

Tome 1

29901

4



1^{re} année

Élie Azoulay

Jean Avignant

Guy Auliac

3^e édition



TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Logique élémentaire. Notion d'ensemble. Opérations sur les ensembles

		1
A.	Logique	1
1.1	Règle du jeu	1
1.2	Propositions	1
1.3	Négation d'une proposition	1
1.4	Connecteurs logiques	2
1.5	Conjonction. Disjonction	2
1.6	Implication. Équivalence	3
B.	Ensembles. Opérations sur les ensembles	6
1.1	Ensemble	6
1.2	Appartenance	6
1.3	Détermination d'un ensemble	6
1.4	Égalité de deux ensembles	7
1.5	Inclusion	7
1.6	Visualisation des ensembles. Diagrammes	7
1.7	Opérations sur les ensembles	8
1.8	Propriétés des opérations sur les ensembles	10
1.9	Lois de De Morgan et généralisation	11
1.10	Différence de deux ensembles	11
1.11	Notion de recouvrement et de partition	12
1.12	Ensembles usuels en mathématiques	12
1.13	Produit d'ensembles	13
1.14	Relation. Graphe d'une relation	14
C.	Quantificateurs	14
1.1	Quantificateurs	14
1.2	Quantificateurs et négation	15
	Résumé	16
	Exercices	18
	Corrigés	20

CHAPITRE 2

Applications. Relations d'ordre et d'équivalence.**Analyse combinatoire**

		27
2.1	Lois de composition	27
2.2	Notion d'application.....	28
2.3	Notion de relation binaire	32
2.4	Relation d'équivalence.....	33
2.5	Équivalence compatible avec une loi de composition	34
2.6	Homomorphismes	35
2.7	Relation d'ordre	35
2.8	Ordre total. Ordre induit.....	36
2.9	Majorant. Minorant	36
2.10	Puissance d'un ensemble.....	37
2.11	Ensemble dénombrable.....	37
2.12	Dénombrément des différentes applications d'un ensemble E dans un ensemble F	39
2.13	Applications : binôme de Newton	41
	<i>Résumé</i>	45
	<i>Exercices</i>	47
	<i>Corrigés</i>	49

CHAPITRE 3

Structures algébriques

		55
3.1	Groupe	55
3.2	Sous-groupe.....	57
3.3	Homomorphisme de groupes	59
3.4	Groupe ordonné	60
3.5	Anneau	61
3.6	Corps	63
	<i>Résumé</i>	64
	<i>Exercices</i>	65
	<i>Corrigés</i>	67

CHAPITRE 4

Construction de \mathbb{R} . Éléments de topologie

		75
A.	Construction de \mathbb{R}	75
4.1	Axiomes des nombres réels.....	75

4.2	Axiome de Cantor	77
4.3	Unicité de \mathbb{R}	77
4.4	Conséquences des axiomes	78
B.	Topologie de \mathbb{R}	80
4.1	Voisinage d'un point	80
4.2	Ensemble ouvert	80
4.3	Topologie de \mathbb{R}	81
4.4	Voisinage de $A \subset \mathbb{R}$	82
4.5	Intérieur de A	82
4.6	Adhérence	82
4.7	Point d'accumulation	82
4.8	Point isolé	83
4.9	Notion d'espace séparé	83
4.10	Base de voisinage de x	83
4.11	Théorème de Bolzano-Weierstrass	84
4.12	La droite numérique achevée $\bar{\mathbb{R}}$	84
	<i>Résumé</i>	85
	<i>Exercices</i>	86
	<i>Corrigés</i>	87

CHAPITRE 5

Suites numériques et applications

	Suites numériques et applications	93
5.1	Rappels	93
5.2	Suites convergentes	94
5.3	Suites de limites infinie	99
5.4	Point d'accumulation. Valeur d'adhérence	102
5.5	Suite de Cauchy	103
5.6	Théorèmes fondamentaux sur les suites numériques	105
5.7	Utilisation des suites en topologie	106
5.8	Suites définies par une relation de récurrence	107
5.9	Application lipschitzienne	111
5.10	Application à la résolution de l'équation $f(x) = 0$	111
	<i>Résumé</i>	118
	<i>Exercices</i>	122
	<i>Corrigés</i>	127

CHAPITRE 6		
Arithmétique		139
6.1	Introduction	139
6.2	Divisibilité, congruence, division euclidienne. Anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	139
6.3	Idéal sur \mathbb{Z} . PGCD – Théorème de Bézout	142
6.4	Théorèmes fondamentaux sur la divisibilité	144
6.5	PPCM	145
6.6	Nombres premiers	147
6.7	Décomposition en facteurs premiers	149
6.8	Systèmes de numération. Système binaire	150
6.9	Notions sur les équations diophantiennes	153
6.10	Développement décimal périodique d'un rationnel	154
	<i>Résumé</i>	156
	<i>Exercices</i>	157
	<i>Corrigés</i>	157
CHAPITRE 7		
Nombres complexes		169
7.1	Définitions	169
7.2	Opérations sur les nombres complexes	170
7.3	Nombres réels. Nombres imaginaires purs. Notations algébriques et trigonométriques des nombres complexes	174
7.4	Formule de Moivre	176
7.5	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe	177
7.6	Résolution de l'équation du second degré	179
7.7	Transformations géométriques simples	180
7.8	e^z pour z complexe. Formules d'Euler	182
	<i>Résumé</i>	184
	<i>Exercices</i>	186
	<i>Corrigés</i>	190
CHAPITRE 8		
Polynômes. Fractions rationnelles		205
8.1	Définition	205
8.2	Addition des polynômes	206

8.3	Multiplication des polynômes	207
8.4	Multiplication par un scalaire	208
8.5	Polynôme dérivé	209
8.6	Formules de MacLaurin et de Taylor	210
8.7	Division des polynômes suivant les puissances décroissantes ou division euclidienne	212
8.8	Recherche du quotient et du reste	213
8.9	Division suivant les puissances croissantes	214
8.10	PGCD de polynômes	216
8.11	Division par $X - a$	219
8.12	Polynômes et équations sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes	220
8.13	Théorème de d'Alembert	221
8.14	Résolution des équations algébriques	221
8.15	Transformée d'une équation	223
8.16	Factorisation d'un polynôme à coefficients réels	224
8.17	Relations entre coefficients et racines	225
8.18	Fractions rationnelles	226
	<i>Résumé</i>	232
	<i>Exercices</i>	235
	<i>Corrigés</i>	241

CHAPITRE 9

Fonctions d'une variable réelle. Limites.**Continuité**

	Continuité	267
9.1	Limites	267
9.2	Relations entre limites de suites et limites de fonctions	269
9.3	Propriétés des limites	270
9.4	Fonctions équivalentes	272
9.5	Continuité	275
9.6	Propriétés des fonctions continues sur un intervalle	279
9.7	Fonction inverse ou réciproque	281
9.8	Continuité uniforme. Fonction lipschitzienne	282
	<i>Résumé</i>	284
	<i>Exercices</i>	285
	<i>Corrigés</i>	286

CHAPITRE 10

Fonctions d'une variable réelle. Dérivée et différentielle	295
10.1 Rappels	295
10.2 Relation liant les dérivées de deux fonctions réciproques	298
10.3 Fonctions dérivées successives. Formule de Leibniz	300
10.4 Fonction convexe	301
10.5 Plan d'étude d'une fonction	303
<i>Exercices</i>	304
<i>Corrigés</i>	304

CHAPITRE 11

Fonctions trigonométriques réciproques	309
11.1 Introduction	309
11.2 Fonction Arcsin	309
11.3 Fonction Arccos	311
11.4 Fonction Arctan	312
<i>Résumé</i>	314
<i>Exercices</i>	315
<i>Corrigés</i>	317

CHAPITRE 12

Primitives. Fonctions exponentielles et logarithmiques.	
Fonctions puissances	329
12.1 Primitives	329
12.2 Logarithmes népériens et exponentielles	330
12.3 Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque	331
12.4 Fonctions puissances	333
12.5 Fonctions de la forme u^v	334
<i>Exercices</i>	335
<i>Corrigés</i>	337

CHAPITRE 13

Fonctions hyperboliques directes et inverses	347
13.1 Fonctions hyperboliques directes	347
13.2 Étude des fonctions hyperboliques	348
13.3 Relations entre les fonctions hyperboliques	352

13.4	Formules de duplication.....	353
13.5	Expression des fonctions hyperboliques de a en fonction de $\operatorname{th} \frac{a}{2} = t$	354
13.6	Fonctions hyperboliques inverses ou réciproques.....	355
	<i>Résumé</i>	359
	<i>Exercices</i>	362
	<i>Corrigés</i>	363
CHAPITRE 14		
	Formules de Taylor. Développements limités. Applications	371
14.1	Théorème de Rolle.....	371
14.2	Théorème des accroissements finis	372
14.3	Applications aux variations de fonctions	374
14.4	Formules de Taylor.....	375
14.5	Formule de MacLaurin	378
14.6	Notions sur les développements limités	379
14.7	Principaux développements limités.....	383
14.8	Applications à la recherche des limites.....	387
14.9	Applications à l'étude des courbes d'équation $y = f(x)$	389
14.10	Marche à suivre pour l'étude d'une fonction $x \mapsto f(x)$ et construction de son graphe	393
	<i>Résumé</i>	394
	<i>Exercices</i>	397
	<i>Corrigés</i>	402
	Brèves notices sur les mathématiciens	425
	Index	427

Elie AZOULAY – Jean AVIGNANT – Guy AULIAC

LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE

1^{re} année • Tome 1

MIAS • MASS • SM

Bien connu des étudiants comme des enseignants, ce cours en quatre tomes est destiné aux étudiants des deux premières années de licence scientifique. Les deux premiers volumes recouvrent l'enseignement généralement traité en première année, les deux derniers volumes, ceux de la deuxième année. Cette nouvelle édition revue et corrigée recouvre également l'essentiel du programme des classes préparatoires.

La compréhension du cours est facilitée par de nombreux exemples. Afin d'aider l'étudiant à bien assimiler les notions, de nombreux exercices et problèmes résolus sont proposés à la fin de chaque chapitre. Par ailleurs, un certain nombre de problèmes récapitulatifs assurent un approfondissement des concepts.

Cet ouvrage, qui a fait ses preuves, est le meilleur garant de réussite aux examens et aux concours.

Cours

Exos

Méthodes

Annales

Aide-mémoire

3^e édition



9 782100 067923



EdiScience

ISBN 2 10 006792 3

www.ediscience.net