

COURS SPÉCIALISÉS
COLLECTION SMF

Un cours de théorie analytique des nombres

Emmanuel KOWALSKI



13

COURS SPÉCIALISÉS 13

M 556



29967

3

**UN COURS DE
THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES**

Emmanuel Kowalski

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-----------|
| Préface | vii |
| 1. Introduction | 1 |
| 1.1. Introduction | 1 |
| 1.2. Le prétexte | 2 |
| 1.3. Explicitation | 3 |
| 1.4. Le critère d'équirépartition de Weyl | 8 |
| 1.5. Motivation I : le crible | 10 |
| 1.6. Motivation II : les formes modulaires | 15 |
| 2. Préparatifs pour le théorème des nombres premiers | 19 |
| 2.1. Séries de Dirichlet | 19 |
| 2.2. Fonctions sommatoires et séries de Dirichlet | 29 |
| 2.3. Séries de Dirichlet et fonctions sommatoires | 30 |
| 2.4. Caractères de groupes abéliens finis | 39 |
| 2.5. La formule de sommation de Poisson | 44 |
| 2.6. Fonctions L de Dirichlet | 46 |
| Appendice : produits infinis | 52 |
| 3. Le théorème des nombres premiers | 55 |
| 3.1. Introduction | 55 |
| 3.2. Le prolongement analytique des fonctions L de Dirichlet | 56 |
| 3.3. Les zéros des fonctions L de Dirichlet | 62 |
| 3.4. Le théorème des nombres premiers | 78 |
| Appendice : résultats d'analyse complexe | 84 |
| 4. Discussion du théorème des nombres premiers | 87 |
| 4.1. L'Hypothèse de Riemann Généralisée | 87 |
| 4.2. Problèmes d'uniformité : exemple | 95 |
| 4.3. Le théorème de Siegel-Walfisz | 96 |
| 4.4. Le théorème de Bombieri-Vinogradov | 101 |
| 4.5. L'inégalité de Brun-Titchmarsh | 102 |

| | |
|--|-----|
| 5. Crible et sommes oscillantes sur les nombres premiers | 107 |
| 5.1. Le crible en général | 107 |
| 5.2. Arguments heuristiques | 108 |
| 5.3. Un crible combinatoire simple | 111 |
| 5.4. Le crible oscillant de Duke-Friedlander-Iwaniec | 124 |
| 5.5. Exemple pédagogique | 135 |
| 6. Formes automorphes et décomposition spectrale | 145 |
| 6.1. Formes linéaires en racines de congruences quadratiques | 145 |
| 6.2. Une pincée de géométrie hyperbolique | 154 |
| 6.3. Formes automorphes : définitions de base | 160 |
| 6.4. Séries d'Eisenstein | 169 |
| 6.5. Le spectre discret | 180 |
| 6.6. Décomposition spectrale complète pour $\Gamma_0(q)$ | 184 |
| 7. Estimation d'une série de Poincaré | 185 |
| 7.1. Première réduction | 186 |
| 7.2. Première étape commune | 190 |
| 7.3. Preuve conditionnelle | 193 |
| 7.4. Preuve inconditionnelle | 195 |
| Appendice : les fonctions tranquilles | 202 |
| 8. Équirépartition des racines de congruences quadratiques et applications | 203 |
| 8.1. Introduction | 203 |
| 8.2. Formes linéaires | 205 |
| 8.3. Formes bilinéaires | 206 |
| 8.4. Conclusion et applications | 210 |
| Examen – Bordeaux, Mai 2002 | 221 |
| Bibliographie | 225 |
| Index | 231 |

Un cours de théorie analytique des nombres

Emmanuel KOWALSKI

Ce livre est une introduction à la théorie multiplicative des nombres premiers. Il est divisé approximativement en deux parties. La première introduit les méthodes classiques basées sur les propriétés analytiques des séries de Dirichlet, menant aux résultats fondamentaux tournant autour du théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. La seconde expose des méthodes faisant partie des thèmes de recherche les plus actuels pour démontrer un théorème de Duke, Friedlander et Iwaniec sur l'équirépartition des racines d'un polynôme quadratique modulo les nombres premiers (ce résultat sert de fil rouge durant tout le livre). Les deux points essentiels sont des résultats de crible non limités aux entiers « presque premiers », et l'exploitation des résultats de la théorie spectrale des formes automorphes.

Emmanuel Kowalski est professeur à l'Université Bordeaux I. Ses travaux portent sur la théorie analytique des nombres, en particulier les aspects analytiques des fonctions L et des formes automorphes, et leurs interactions avec la géométrie arithmétique.

La série "COURS SPÉCIALISÉS" a pour vocation de mettre à la disposition du public des textes de cours destinés aux formations doctorales en mathématiques. Ces textes, accessibles aux étudiants de première année de troisième cycle (DEA), s'adressent aussi aux doctorants et aux chercheurs désirant élargir leur horizon mathématique.

Collection dirigée par Daniel BARLET



Société Mathématique
de France

ISBN 2-85629-161-9
ISSN 1284-6090



9 782856 291610