

N I C O L A S B O U L E A U

P R O B A B I L I T É S D E

L' I N G É N I E U R

*K-M
SVR 2000*

V A R I A B L E S

A L É A T O I N E S

E T S I M U L A T I O N

H E R M A N N



E D I T E U R S

D E S S C I E N C E S E T

D E S A R T S

1253

1
—
2

M. 55
L'x

Nicolas Bouleau

Probabilités de l'ingénieur

Variabes aléatoires et simulation

Préface de Alain Bensoussan



Hermann



Table des matières

PREMIERE PARTIE : THEORIE ELEMENTAIRE

CHAPITRE I . Probabilité sur un ensemble fini

§ 1	La probabilité comme pondération.....	p	11
§ 2	Probabilité conditionnelle.....	p	14
§ 3	Indépendance.....	p	15
§ 4	Variables aléatoires.....	p	19
§ 5	Notations probabilistes.....	p	22
§ 6	Indépendance et covariance des variables aléatoires.....	p	23
§ 7	Algorithmes de dénombrement et structures de données.....	p	24
§ 8	Exercices	p	31

CHAPITRE II . Variables aléatoires discrètes sur des espaces de probabilité généraux

§ 1	Espaces de probabilité généraux.....	p	33
§ 2	Variables aléatoires discrètes.....	p	35
§ 3	Indépendance, Lemme de Borel-Cantelli.....	p	37
§ 4	Fonction génératrice de Laplace d'une variable aléatoire entière.....	p	40
§ 5	Lois discrètes usuelles.....	p	42
§ 6	Loi faible des grands nombres.....	p	44
• § 7	Notions élémentaires sur les chaînes de Markov.....	p	46
	Exercices.....	p	55

CHAPITRE III. Variables aléatoires à densité continue

§ 1	Variables aléatoires à valeurs réelles à densité continue.....	p	59
§ 2	Variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d à densité continue.....	p	63
§ 3	Moments d'une variable à valeurs dans \mathbb{R}^d à densité continue.....	p	65

§ 4	Lois conditionnelles.....	p 66
§ 5	Indépendance.....	p 69
	Exercices.....	p 70

CHAPITRE IV . Simulation

§ 1	Suites de nombres au hasard, théorie et pratique.....	p 73
§ 2	Générateurs de nombres pseudo-aléatoires.....	p 74
§ 3	Quelques procédés particuliers de simulation de certaines variables aléatoires courantes....	p 75
§ 4	Procédés généraux de simulation des variables aléatoires.....	p 78
§ 5	Utilisation de la simulation : quelques exemples.....	p 82
	Exercices.....	p 89

DEUXIEME PARTIE : CONVERGENCE DES VARIABLES ALEATOIRES ET CALCUL CONDITIONNEL

CHAPITRE V . La probabilité comme mesure σ -additive

§ 1	Quelques difficultés de l'approche élémentaire.	p 93
§ 2	Loi forte des grands nombres et probabilités σ -additives.....	p 95
§ 3	Avantages de l'intégrale de Lebesgue.....	p 98
§ 4	Résumé de la théorie de la mesure	p 99
§ 5	Résumé de la théorie de l'intégration.....	p 104
	Exercices.....	p 107
§ 6	Espaces produits.....	p 108
	Exercices.....	p 111

CHAPITRE VI . Variables aléatoires générales

§ 1	Variables aléatoires.....	p 113
	Exercices.....	p 121
§ 2	Indépendance, Loi du tout ou rien.....	p 125
§ 3	Loi des grands nombres et moments exponentiels.....	p 128
§ 4	Remarques sur la mise en forme de situations aléatoires.....	p 132
§ 5	Transformation de Fourier des lois des	

variables aléatoires.....	p 138
§ 6 Autres transformations utiles.....	p 143
§ 7 Lois usuelles et leurs propriétés.....	p 144
§ 8 Quelques autres lois moins usuelles.....	p 148
§ 9 Loi normale sur \mathbb{R}^d	p 153
Exercices.....	p 157

CHAPITRE VII. Convergence des variables aléatoires

§ 1 Différents types de convergence.....	p 163
§ 2 Loi forte des grands nombres.....	p 167
Exercices.....	p 174
§ 3 Convergence en loi.....	p 177
§ 4 Théorème central limite.....	p 181
Exercices.....	p 183
§ 5 Compléments sur la convergence en loi.....	p 187
Exercices d'initiation aux statistiques.....	p 191

CHAPITRE VIII. Calcul conditionnel

§ 1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu.....	p 195
§ 2 Espérance conditionnelle et projection dans L^2	p 201
Exercices.....	p 203
§ 3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire.....	p 205
§ 4 Version régulière de la loi conditionnelle de X sachant Y.....	p 207
§ 5 Espérances conditionnelles et variables gaussiennes.....	p 211
Exercices.....	p 214

CHAPITRE IX. Calculs numériques d'espérances et d'espérances conditionnelles

§ 1 Retour sur la simulation.....	p 217
§ 2 Théorème fondamental de la simulation.....	p 224
§ 3 Calcul d'espérances de variables aléatoires simulées dans le cas d'un nombre fini d'appels à la fonction random.....	p 225

§ 4	Cas d'un nombre non limité d'appels à la fonction random.....	p 231
§ 5	Calculs d'espérances conditionnelles par approximation dans L^2	p 234
§ 6	Calcul numérique d'espérances conditionnelles de variables simulées.....	p 244
	Exercices.....	p 253

TROISIEME PARTIE : COMPLEMENTS

CHAPITRE X. Le schéma de Bernoulli

§ 1	Propriétés de mélange.....	p 259
§ 2	Schéma de Bernoulli et développements n-adiques.....	p 261
§ 3	Quelques mesures diffuses étrangères à la mesure de Lebesgue.....	p 263
§ 4	Démonstration du théorème fondamental de la simulation.....	p 267
	Exercices.....	p 269

CHAPITRE XI. Aperçu historique et quelques textes originaux

.	Aperçu historique.....	p 273
.	Laplace : Théorie analytique des probabilités 1814.....	p 281
.	Poisson : Recherches sur la probabilité des jugements 1837.....	p 305

CHAPITRE XII. Notions sur les martingales à temps discret

§ 1	Martingales et jeux de hasard.....	p 311
§ 2	Intégrabilité uniforme et théorèmes de convergence.....	p 316
§ 3	Applications.....	p 321
	Exercices.....	p 323

CHAPITRE XIII. Exercices de probabilités à traiter par

	<u>l'informatique</u>	
§ 1	Simulation du calcul de π par la méthode de Buffon.....	p 325
§ 2	Evaluation de la population d'un étang par marquage d'une sous-population.....	p 328

§ 3	Calcul d'une intégrale par la loi des grands nombres.....	p 330
§ 4	Optimisation par simulation.....	p 331
§ 5	Simulation de la file d'attente M/D/1.....	p 332
§ 6	Dimensionnement et gestion optimale d'un barrage en contexte aléatoire.....	p 335
§ 7	Calcul formel et fiabilité.....	p 337

PROBLEMES

.	Ventilation d'un tunnel routier.....	p 341
.	Méthodes de tri et simulation.....	p 344
.	Télescopage de voitures.....	p 349

INDICATIONS SUR LES SOLUTIONS DE CERTAINS EXERCICES.....	p 353
POLYNOMES ORTHOGONAUX.....	p 365
MEMENTO DE LOIS USUELLES.....	p 367
TABLES NUMERIQUES ET ALGORITHMES DE SIMULATION.....	p 369
BIBLIOGRAPHIE.....	p 381
POSTFACE.....	p 383

Issu d'un enseignement à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, ce manuel de probabilités s'attache à établir la jonction entre une compréhension intuitive de situations concrètes et leur modélisation, au sein d'une théorie rigoureuse, jusqu'au traitement informatique.

L'option pédagogique vise à rapprocher à la fois l'enseignement de l'informatique et celui des probabilités.

Les quatre premiers chapitres développent, par la pratique, l'intuition probabiliste, la compréhension des concepts et l'acquisition des méthodes. La simulation est facilitée par l'absence de difficultés mathématiques. Les exemples et applications ainsi acquis permettent ensuite l'usage en toute rigueur des outils mathématiques nécessaires pour démontrer en toute rigueur les théorèmes de convergence et le calcul conditionnel. Dans ce cadre, on peut alors aborder les méthodes de calcul numérique d'espérances et d'espérances conditionnelles. Le ouvrage comprend également l'étude de sources historiques et divers approfondissements de la recherche.

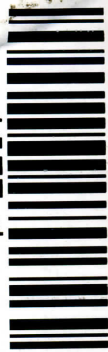
L'étudiant trouvera donc un exposé précis et complet des techniques de base, où les développements et les applications s'enchaînent de manière harmonieuse, avec de nombreux exercices et la présence permanente de l'outil informatique.

Le livre s'adresse aux étudiants et enseignants des écoles d'ingénieurs et des universités dans les domaines mécaniques appliquées ou informatique ainsi que l'économie, télécommunications ou génie civil. Il intéresse également ceux qui s'occupent de problèmes de transports, de fiabilité, de sécurité et plus généralement de modélisation de phénomènes incertains.

ISBN 2 705 1418 4

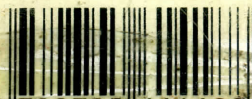
130 F

1253/1



HERMANN

293 RUE LECLERCQ, 75015 PARIS



9 782705 614188