

M 549

ANALYSE POUR LA LICENCE

Cours et exercices corrigés

29881

④

Jean-Pierre Marco

Maître de conférences
à l'université Pierre-et-Marie-Curie (Paris VI)



2^e édition

DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS

VII

CONVENTIONS ET NOTATIONS

IX

PARTIE 1 TOPOLOGIE GÉNÉRALE

CHAPITRE 1 • LA DROITE RÉELLE

1.1 Rappels sur les ensembles infinis

5

1.2 La droite réelle

7

1.3 La représentation des réels

10

1.4 Quelques sous-ensembles particuliers

15

CHAPITRE 2 • ESPACES TOPOLOGIQUES

2.1 Topologies, espaces topologiques

18

2.2 Notions ensemblistes associées à une topologie

24

CHAPITRE 3 • ESPACES MÉTRIQUES

3.1 Distances et espaces métriques

30

3.2 La topologie d'un espace métrique

37

3.3 Espaces métrisables

40

CHAPITRE 4 • LIMITES ET CONTINUITÉ

4.1 Continuité

44

4.2 Limites

51

4.3 Produits et quotients

55

4.4 Exemples et applications

62

4.5 Continuité et densité, prolongements

64

4.6 Suites de fonctions

67

CHAPITRE 5 • ESPACES COMPLETS

5.1	Espaces métriques complets	70
5.2	Applications aux problèmes de convergence	77
5.3	Approximations successives et point fixe	81
5.4	La propriété de Baire	85
5.5	Le complété d'un espace métrique	89

CHAPITRE 6 • ESPACES TOPOLOGIQUES COMPACTS

6.1	Espaces topologiques compacts	94
6.2	Espaces métriques compacts	98
6.3	Compacité et produit	104
6.4	Applications pratiques de la compacité	106
6.5	Espaces localement compacts	110

CHAPITRE 7 • ESPACES TOPOLOGIQUES CONNEXES

7.1	Espaces connexes	114
7.2	Connexité et continuité	118
7.3	Applications pratiques de la connexité	123
7.4	Connexité locale	125

CHAPITRE 8 • EXEMPLES D'ESPACES TOPOLOGIQUES

8.1	Groupes topologiques	128
8.2	Groupes opérant sur des espaces topologiques	133
8.3	Les tores	137
8.4	Les espaces projectifs	140

PARTIE 2

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

CHAPITRE 9 • ESPACES VECTORIELS NORMÉS

9.1	Espaces vectoriels normés	147
9.2	Applications linéaires et multilinéaires continues	155
9.3	Espaces normés de dimension finie	160

CHAPITRE 10 • SÉRIES ET FAMILLES SOMMABLES

10.1	Définitions et exemples	163
10.2	Convergence et sommabilité	164
10.3	Séries et familles dans les espaces de Banach	167
10.4	Quelques exemples	174

CHAPITRE 11 • ESPACES DE HILBERT

11.1	Formes hermitiennes et espaces de Hilbert	178
11.2	La projection orthogonale	182
11.3	Bases hilbertiennes	188

PARTIE 3 MESURE ET INTÉGRATION

CHAPITRE 12 • RAPPELS SUR L'INTÉGRALE DE RIEMANN

12.1	Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier	198
12.2	Intégrale de Riemann d'une fonction réglée	202
12.3	Intégrabilité au sens de Riemann	205
12.4	Les propriétés de l'intégrale de Riemann	209

CHAPITRE 13 • ESPACES MESURABLES

13.1	Espaces mesurables	215
13.2	Fonctions numériques mesurables	221

CHAPITRE 14 • MESURES ET ESPACES MESURÉS

14.1	Mesures et espaces mesurés	227
14.2	Un théorème général d'unicité	232

CHAPITRE 15 • L'INTÉGRALE SUR UN ESPACE MESURÉ

15.1	Première présentation	237
15.2	Premiers exemples	244
15.3	Les théorèmes de convergence	246
15.4	Une deuxième présentation de l'intégrale de Lebesgue	248

CHAPITRE 16 • CONSTRUCTION DE MESURES

16.1	L'espace mesuré associé à une mesure extérieure	256
16.2	Mesures boréliennes	259

CHAPITRE 17 • MESURE ET INTÉGRALE DE LEBESGUE DANS \mathbb{R}

17.1	Mesure extérieure sur \mathbb{R} et espace de Lebesgue	263
17.2	L'intégrale de Lebesgue dans \mathbb{R}	274

CHAPITRE 18 • INTÉGRATION SUR LES PRODUITS

18.1	Rappels et compléments sur les tribus produit	279
18.2	Mesures produit	282
18.3	Les produits d'un nombre fini d'espaces	289

CHAPITRE 19 • LA MESURE DE LEBESGUE DANS \mathbb{R}^n

19.1 Tribu et mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n	291
19.2 La structure produit de l'espace de Lebesgue	297
19.3 Exemples et applications	299
19.4 Le théorème du changement de variables	301

CHAPITRE 20 • INTERVERSION DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

20.1 Les théorèmes de convergence	307
20.2 Continuité sous le signe \int	310
20.3 Dérivabilité sous le signe \int	311
20.4 Intervernion de \sum et \int	314

CHAPITRE 21 • LES ESPACES \mathcal{L}^p ET L^p

21.1 Définitions et propriétés pour $1 \leq p < \infty$	319
21.2 Le théorème de Riesz-Fisher	324
21.3 Les espaces \mathcal{L}^∞ et L^∞	327
21.4 Premiers résultats de dualité	330

CORRECTION DES EXERCICES

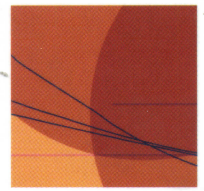
335

BIBLIOGRAPHIE

347

INDEX

348



Jean-Pierre Marco

ANALYSE POUR LA LICENCE

Entièrement révisé, cet ouvrage présente la partie « géométrique » du programme d'analyse de la licence : on y expose simultanément la topologie générale, la théorie des espaces normés, et la théorie de la mesure et de l'intégration. Ce rapprochement met en relief les interactions entre les différentes théories : on peut par exemple envisager la notion de « taille » d'une partie de la droite réelle à la fois du point de vue de la topologie et de celui de la mesure, ou encore définir dans leur cadre naturel les espaces fonctionnels associés à l'intégrale de Lebesgue.

L'auteur s'est ainsi particulièrement attaché dans cette seconde édition à l'explication des idées, de leurs relations mutuelles et de leurs applications à la résolution de problèmes précis.

Pour faciliter la compréhension des concepts introduits et l'acquisition des connaissances, de nombreux exemples, exercices d'application et exercices corrigés complètent le cours.

Ce livre s'adresse aux étudiants du second cycle des universités, ainsi qu'aux candidats au CAPES et à l'Agrégation.

JEAN-PIERRE MARCO
est maître de conférences
à l'université Pierre et
Marie Curie (Paris VI).

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

