

Laurent Schwartz

M 541

Analyse IV

APPLICATIONS À LA THÉORIE DE LA MESURE

avec la collaboration de K. Zizi

1979 0

^
/ 1



HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE VI. APPLICATIONS DE LA THÉORIE DE LA MESURE

§1. Propriétés particulières aux mesures de Radon sur la droite réelle.

Introduction du symbole $\int_a^b d\mu$	11
Fonctions à variation bornée et intégrales indéfinies	14
Intégrales indéfinies et primitives - Chemins rectifiables	19
Fonctions absolument continues et intégrales indéfinies	24
Théorème de densité de Lebesgue	26
Primitives successives d'une fonction continue sur la droite	36
Formule de l'intégration par parties	40
Changement de variable dans le calcul des intégrales simples	45
Deuxième formule de la moyenne	48
Intégrales impropres sur la droite achevée	50
Formule de l'intégration par parties pour les intégrales impropres	54
Critère d'Abel pour la semi-convergence des intégrales impropres	55
Exemples d'application du critère d'Abel	58
Valeur principale de Cauchy	61

§2. Intégrales multiples sur \mathbb{R}^n , longueurs, aires, volumes dans les espaces euclidiens affines de dimension finie Changements de variables dans les intégrales multiples sur \mathbb{R}^n .

Changements de variables dans les intégrales multiples sur \mathbb{R}^n	67
Exemple de changement de variables	73
Généralisations du théorème du changement de variables	76
Mesure des volumes dans un espace affine euclidien de dimension finie	81

Mesure des longueurs dans un espace affine euclidien	83
Mesure des aires n -dimensionnelles	83
Aire n -dimensionnelle d'une variété paramétrique	86
Calcul des aires des sphères et mesure des angles solides	92
Calcul d'intégrales à partir d'intégrales d'hypersurface	96
§3. Fonctions représentées par des séries ou des intégrales.	
Fonctions représentées par des séries	103
Intégrabilité de la somme d'une série	103
Fonctions représentées par des intégrales	105
Continuité d'une fonction représentée par une intégrale	105
Intégrabilité d'une fonction représentée par une intégrale	106
Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale	106
Primitives successives d'une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R}	110
Cas des intégrales impropres convergentes	112
Application à la divisibilité des fonctions dérivables	118
§4. Le produit de convolution dans \mathbb{R}^n et \mathbb{T}^n .	
L'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R}^n)$	123
Extension du produit de convolution à d'autres classes de fonctions	126
Approximation de l'unité	133
Approximation polynomiale dans \mathbb{R}^n	138
Caractérisation des parties compactes de $L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^p(I)$	140
Partition de l'unité indéfiniment différentiable	145
L'algèbre de convolution $M^1(\mathbb{R}^n)$	149
L'algèbre de convolution $V(\mathbb{R}^n)$	154
L'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{T}^n)$	154
L'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{Z}^n)$	155
§5. La transformation de Fourier.	
La transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$	157

Transformée de Fourier d'une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide	167
Extension de la transformation de Fourier à l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$. . .	170
Transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure bornée sur \mathbb{R}^n . . .	171
La transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{T}^n)$ et $M(\mathbb{T}^n)$	173
Transformée de Fourier d'une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{T}^n	177
Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{T}^n)$	179
Algèbre des séries de Fourier absolument convergentes	180
Inverse de la transformée de Fourier d'une fonction de $f \in L^1(\mathbb{R})$. . .	181
Inverse de la transformée de Fourier d'une fonction de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. . .	186
Séries de Fourier d'une variable	193
Convergence des sommes de Fejer	197
Convergence des sommes de Poisson	199
La formule de Poisson	200
Séries de Fourier de fonctions de plusieurs variables	203
Les caractères de l'algèbre $V(\mathbb{R}^n)$ et le théorème de Wiener . . .	207
Les fonctions définies positives et le théorème de Bochner dans \mathbb{R}^n . . .	216
Le théorème de P.Lévy	222
Les caractères de l'algèbre $l^1(\mathbb{Z}^n)$ et le théorème de Wiener . . .	225
§6. - Algèbre extérieure d'un espace vectoriel.	
Application multilinéaire alternée	229
Multiplication extérieure des formes multilinéaires antisymétriques . . .	235
Produit extérieur d'applications multilinéaires	242
Algèbre extérieure d'un espace vectoriel	243
Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie	243
Autres méthodes d'orientation d'un espace vectoriel	245
Propriétés particulières des p -formes antisymétriques sur un espace vectoriel E de dimension N , orienté	248

Produit vectoriel de $N - 1$ vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension N , orienté	250
§7. Formes différentielles sur un espace affine.	
Formes différentielles sur un espace affine	255
Produit extérieur de formes différentielles	259
Forme différentielle associée à la dérivée d'une fonction	260
Image réciproque d'une forme différentielle par une application	262
Formes différentielles sur une variété abstraite	267
Formes différentielles et champs dans un espace euclidien orienté \mathcal{E} de dimension finie N	267
Cobord ou différentielle extérieure d'une forme différentielle	269
Extension au cas abstrait	276
Gradient, divergence, rotationnel, dans un espace affine euclidien orienté \mathcal{E} de dimension N	276
Interprétation mécanique de la divergence	279
Calcul du gradient, de la divergence et du laplacien en coordonnées sphériques	281
Primitive extérieure d'une forme différentielle	283
§8. Orientation des variétés différentiables sur le corps des réels.	
Système continu d'orientations d'une variété	291
Comparaison de 2 systèmes continus d'orientations	293
Orientabilité et orientation d'une variété	294
Orientabilité d'une variété par des cartes co-orientables	294
Orientabilité d'une variété par des champs de vecteurs continus	295
Orientabilité d'une variété par le signe des formes différentielles réelles	296
Exemple d'une variété non orientable : la ceinture de Möbius	297
Orientabilité des variétés complexes	299
Orientabilité transversale d'une variété Σ de dimension $n = N - 1$ dans un espace affine \mathcal{E} de dimension N sur le corps des réels	299

Théorème de Stokes général	352
Examen du cas particulier $n = 1$	359
Examen du cas particulier $n = 2$ dans le plan \mathbb{R}^2	
- Formule de Green-Riemann	361
Travail d'un champ de vecteurs	363
Flux d'un champ de vecteurs	364
Formule d'Ostrogradsky	365
Formule originelle de Stokes	366
Règles de transformations des intégrales en analyse vectorielle	367
Formule de Green et autres	367
§11. Calcul des intégrales définies par la méthode des résidus.	
Intégrale sur $[0, 2\pi]$ d'une fraction rationnelle de fonctions trigonométriques	371
Intégrale sur la droite réelle	372
Application à des produits de convolution	378
Introduction de facteurs exponentiels	382
Application à des transformées de Fourier	387
Intégrales sur $[0, +\infty[$	390
§12. Fonctions Euleriennes et Formule d'Euler - Mac laurin.	
La fonction Γ définie comme intégrale	397
Relation fonctionnelle	398
Prolongement de $\Gamma(z)$ par la relation fonctionnelle	398
Les pôles de $\Gamma(z)$	399
Intégrale de Gauss	399
Fonction B $((p, q))$	400
Formule des compléments	402
Intégrales de Fresnel	403
Généralisation de la fonction B	406
Courbe représentative de la fonction	408
Formule de Stirling	408

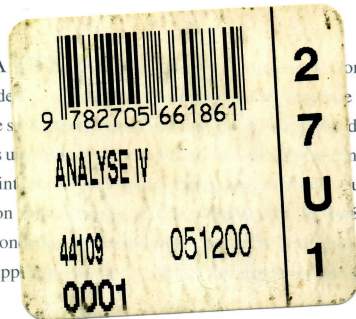
Application au développement de $\frac{1}{\Gamma}$ en produit infini	411
Formule de duplication	412
Convergence du produit représentant $\frac{1}{\Gamma}$	413
La fonction $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$	414
Développement de $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$	416
Développement en produit infini de $\sin z$	417
Décomposition en éléments simples de $\cot g z$	417
Développement de $\cot g z$, les nombres $\zeta(2n)$	418
Les nombres $\zeta(2n)$, les nombres de Bernoulli b_n	418
Calcul des b_n par récurrence, les polynômes G_n	419
Développement en série de Fourier des polynômes G_n	421
Les polynômes de Bernoulli	422
Les polynômes Q_n	424
Formule d'Euler - Mac laurin	427
Approximation par la formule d'Euler - Mac laurin d'intégrales définies	430
Approximation par la formule d'Euler - Mac laurin de sommes de séries convergentes	431
Approximation par la formule d'Euler - Mac laurin de la somme des premiers termes d'une série divergente	433
Approximation par la formule d'Euler - Mac laurin de la somme d'une série alternées semi-convergentes	436

ANALYSE I. THÉORIE DES ENSEMBLES ET TOPOLOGIE. Les cinq premiers axiomes de la théorie des ensembles. Axiome du choix. Les entiers naturels : l'axiome de l'infini. Relation d'équivalence - Ensemble quotient. Relation d'ordre. Lemme de Zorn. Opérations sur les ensembles infinis. Les nombres ordinaux et cardinaux. Espaces métriques. Espaces topologiques. Fonctions continues. Espaces compacts. Suites et filtres. Propriétés des fonctions continues sur un espace compact. Espaces localement compacts. Espaces connexes. Espaces métriques complets. Théorie élémentaire des espaces vectoriels normés et des espaces de Banach. Séries dans les espaces vectoriels normés. Espaces fonctionnels : convergence simple et uniforme. Théorie spectrale élémentaire. Produits infinis de nombres ou de fonctions réels ou complexes.

ANALYSE II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Espaces affines. Fonctions réelles d'une variable réelle. Dérivée d'une application d'un espace affine dans un autre. Dérivation des fonctions composées. Applications au changement de variables. Formule des accroissements finis. Application. Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Taylor. Maxima et minima. Théorème des fonctions implicites. Variétés différentiables. Maxima et minima liés. Calcul des variations. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions globales). Continuité de la solution par rapport à un paramètre. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions globales.) Continuité de la solution par rapport à un paramètre. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions locales). Prolongement des solutions locales d'une équations différentielle : solution maximale. Majoration a priori des solutions d'une équation différentielle. Une condition d'existence de solutions globales sur (a,b). Equation différentielle définie par un champ de vecteurs. Résolvante d'une équation différentielle linéaire. Equations linéaires avec second membre. Application de la théorie des équations différentielles linéaires à la continuité et à la dérivabilité de la solution d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre. Exponentielle d'un opérateur. Construction de l'exponentielle d'un opérateur. Solutions bornées des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

ANALYSE III. CALCUL INTÉGRAL. Intégrale de Riemann sur la droite réelle. Espaces mesurés. Intégrale supérieure associée à une mesure positive sur un clan. Mesures de Radon à valeurs scalaires et vectorielles. Intégrale supérieure associée à une mesure de Radon positive. Fonctions mesurables. Fonctions à valeurs vectorielles intégrables. Espaces $\mathcal{L}^p(W, m, F)$. Mesures abstraites à valeurs vectorielles - Variation totale d'une mesure vectorielle. Mesure induite. Mesure de base m. Théorèmes de Radon-Nikodym. Décomposition de Lebesgue d'une mesure. Image d'une mesure par une application. Produit d'espaces mesurés. Théorèmes de Fubini. Invariance de la mesure de Lebesgue par les isométries. Théorème de dérivation de Lebesgue.

ANALYSE IV. APPLICATIONS À LA THÉORIE DE LA...
tion des mesures. Transformation de Fourier des fonctions. Transformée de...
d'une suite de mesures vers une mesure de Dirac. Convergence étroite d'une s...
Lévy. Fonctions à variation bornée sur la droite. Longueur d'un chemin dans u...
et intégrales indéfinies. Critère d'Abel pour la semi-convergence des int...
longueurs, aires, volumes dans les espaces euclidiens affines de dimension...
multiples sur \mathbb{R}^n . Calcul d'intégrales à partir d'intégrales d'hypersurface. Fon...
sentées par des intégrales. Cas des intégrales impropres convergentes. App...
Formule de Stokes. Intégrale eulérienne. Formule d'Euler-McLaurin.



ISBN 2 7056 6186 7

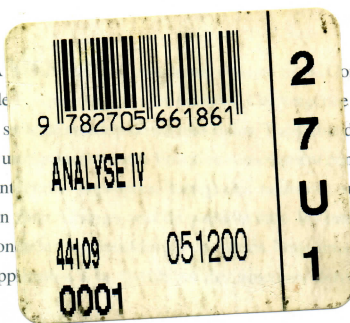


ANALYSE I. THÉORIE DES ENSEMBLES ET TOPOLOGIE. Les cinq premiers axiomes de la théorie des ensembles. Axiome du choix. Les entiers naturels : l'axiome de l'infini. Relation d'équivalence - Ensemble quotient. Relation d'ordre. Lemme de Zorn. Opérations sur les ensembles infinis. Les nombres ordinaux et cardinaux. Espaces métriques. Espaces topologiques. Fonctions continues. Espaces compacts. Suites et filtres. Propriétés des fonctions continues sur un espace compact. Espaces localement compacts. Espaces connexes. Espaces métriques complets. Théorie élémentaire des espaces vectoriels normés et des espaces de Banach. Séries dans les espaces vectoriels normés. Espaces fonctionnels : convergence simple et uniforme. Théorie spectrale élémentaire. Produits infinis de nombres ou de fonctions réels ou complexes.

ANALYSE II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Espaces affines. Fonctions réelles d'une variable réelle. Dérivée d'une application d'un espace affine dans un autre. Dérivation des fonctions composées. Applications au changement de variables. Formule des accroissements finis. Application. Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Taylor. Maxima et minima. Théorème des fonctions implicites. Variétés différentiables. Maxima et minima liés. Calcul des variations. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions globales). Continuité de la solution par rapport à un paramètre. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions globales.) Continuité de la solution par rapport à un paramètre. Théorèmes d'existence et d'unicité (conditions locales). Prolongement des solutions locales d'une équation différentielle : solution maximale. Majoration a priori des solutions d'une équation différentielle. Une condition d'existence de solutions globales sur (a, b) . Equation différentielle définie par un champ de vecteurs. Résolvante d'une équation différentielle linéaire. Equations linéaires avec second membre. Application de la théorie des équations différentielles linéaires à la continuité et à la dérivabilité de la solution d'une équation différentielle dépendant d'un paramètre. Exponentielle d'un opérateur. Construction de l'exponentielle d'un opérateur. Solutions bornées des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

ANALYSE III. CALCUL INTÉGRAL. Intégrale de Riemann sur la droite réelle. Espaces mesurés. Intégrale supérieure associée à une mesure positive sur un clan. Mesures de Radon à valeurs scalaires et vectorielles. Intégrale supérieure associée à une mesure de Radon positive. Fonctions mesurables. Fonctions à valeurs vectorielles intégrables. Espaces $\mathcal{L}^p(W, m, F)$. Mesures abstraites à valeurs vectorielles - Variation totale d'une mesure vectorielle. Mesure induite. Mesure de base m . Théorèmes de Radon-Nikodym. Décomposition de Lebesgue d'une mesure. Image d'une mesure par une application. Produit d'espaces mesurés. Théorèmes de Fubini. Invariance de la mesure de Lebesgue par les isométries. Théorème de dérivation de Lebesgue.

ANALYSE IV. APPLICATIONS À LA THÉORIE DE LA
tion des mesures. Transformation de Fourier des fonctions. Transformée de
d'une suite de mesures vers une mesure de Dirac. Convergence étroite d'une s
Lévy. Fonctions à variation bornée sur la droite. Longueur d'un chemin dans u
et intégrales indéfinies. Critère d'Abel pour la semi-convergence des int
longueurs, aires, volumes dans les espaces euclidiens affines de dimension
multiples sur \mathbb{R}^n . Calcul d'intégrales à partir d'intégrales d'hypersurface. Fon
sentées par des intégrales. Cas des intégrales impropres convergentes. App
Formule de Stokes. Intégrale eulérienne. Formule d'Euler-McLaurin.



ISBN 2 7056 6186 7

