

Arezki KESSI et Abdelouahab MAHMOUDI

**ELEMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE**  
**SÉRIES et INTÉGRALES**

**Cours et Exercices corrigés**

**Les**  
**Mathématiques**  
**à**  
**l'Université**



*Intégrales impropres*



*Séries numériques réelles*



*Suites et séries de fonctions  
d'une variable réelle*



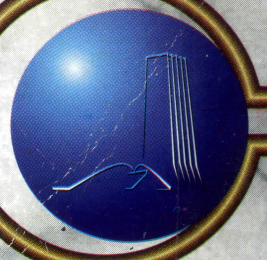
*Séries entières*



*Séries de Fourier*



*Intégrales dépendant  
d'un paramètre*



M 539

Collection  
**Les Mathématiques à l'Université**

*A. KESSI*

*A. MAHMOUDI*

**Éléments d'analyse Mathématique**  
**SERIES ET INTEGRALES**

***Cours et Exercices Corrigés***

- Intégrales impropres*
- Séries numériques réelles*
- Suites et séries de fonctions d'une variable réelle*
- Séries entières*
- Séries de Fourier*
- Intégrales dépendant d'un paramètre*



*Idc 2452  $\frac{1}{1}$*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégrales impropres</b>	<b>1</b>
1.1	Notions générales	1
1.2	Formules d'intégration des intégrales impropres	3
1.2.1	Utilisation d'une primitive	3
1.2.2	Linéarité des intégrales impropres	3
1.2.3	Inégalité des intégrales	4
1.2.4	Intégration par parties	4
1.2.5	Changement de variable	4
1.2.6	Exemples de base	5
1.3	Convergence des intégrales impropres	6
1.3.1	Critère de Cauchy	6
1.3.2	Convergence absolue d'une intégrale impropre	7
1.3.3	Intégrales impropres des fonctions positives	8
1.3.4	Intégrales impropres semi-convergentes	13
1.3.5	Formules de la moyenne	13
1.3.6	Critère d'Abel-Dirichlet pour les intégrales	15
1.3.7	Valeur principale d'une intégrale divergente	16
1.4	Exercices corrigés	19
<b>2</b>	<b>Séries numériques réelles</b>	<b>49</b>
2.1	Progression géométrique	49
2.1.1	Notions générales	49
2.1.2	Progression infinie	50
2.1.3	Transformations élémentaires des progressions	51
2.2	Notions générales sur les séries numériques	52
2.3	Séries à termes positifs	56
2.3.1	Critères de comparaison	56
2.3.2	Règle de D'Alembert et règle de Cauchy	58
2.3.3	Comparaison d'une série avec une intégrale	60
2.3.4	Comparaison avec les séries de Riemann	61
2.4	Séries à termes de signe quelconque	61
2.4.1	Séries absolument convergentes	61
2.4.2	Séries semi-convergentes	64
2.4.3	Critères de convergence pour les séries à termes de signe quelconque	66
2.5	Complément sur les séries numériques	69
2.5.1	Règle de Duhamel	69
2.5.2	Critère de Kummer	70
2.5.3	Critère de Raabe	71
2.5.4	Critère de Bertrand	72

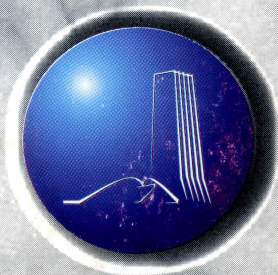
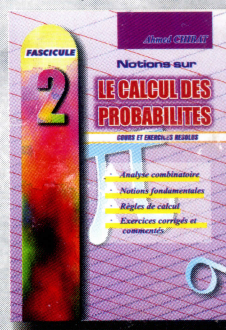
2.5.5	Critère de Gauss . . . . .	73
2.6	Exercices corrigés . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Suites et séries de fonctions d'une variable réelle</b>	<b>101</b>
3.1	Progression géométrique . . . . .	101
3.1.1	Introduction . . . . .	101
3.1.2	Intégration d'une progression géométrique . . . . .	102
3.1.3	Dérivation d'une série géométrique . . . . .	103
3.2	Convergence des suites et séries de fonctions . . . . .	103
3.2.1	Convergence simple des suites et séries de fonctions . . . . .	103
3.2.2	Convergence uniforme des suites de fonctions . . . . .	104
3.2.3	Convergence uniforme des séries de fonctions . . . . .	107
3.2.4	Propriétés des suites et séries de fonctions uniformément convergentes . . . . .	110
3.3	Exercices corrigés . . . . .	115
<b>4</b>	<b>Séries entières</b>	<b>129</b>
4.1	Généralités . . . . .	129
4.2	Convergence uniforme des séries entières . . . . .	132
4.3	Opérations sur les séries entières . . . . .	133
4.4	Dérivation et intégration des séries entières . . . . .	134
4.5	Développement d'une fonction en série entière . . . . .	135
4.5.1	Unicité du développement d'une fonction en série entière . . . . .	135
4.5.2	Conditions suffisantes . . . . .	136
4.5.3	Développement en série entière de fonctions usuelles . . . . .	136
4.6	Exercices corrigés . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>151</b>
5.1	Notions générales . . . . .	151
5.1.1	Périodes d'une fonction périodique . . . . .	151
5.2	Séries trigonométriques-Séries de Fourier . . . . .	153
5.2.1	Propriétés du système trigonométrique; série de Fourier . . . . .	154
5.2.2	Développement en séries de Fourier des fonctions paires et impaires . . . . .	156
5.2.3	Développement de fonctions en séries de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ . . . . .	158
5.2.4	Convergence des séries de Fourier . . . . .	158
5.2.5	Approximation en moyenne quadratique - Egalité de Parseval . . . . .	162
5.3	Exercices corrigés . . . . .	163
<b>6</b>	<b>Intégrales dépendant d'un paramètre</b>	<b>175</b>
6.1	Intégrales propres dépendant d'un paramètre . . . . .	175
6.2	Intégrales impropres dépendant d'un paramètre . . . . .	178
6.2.1	Notion de convergence uniforme . . . . .	179
6.2.2	Critères de convergence . . . . .	181
6.2.3	Propriétés des intégrales uniformément convergentes . . . . .	183
6.3	Fonctions eulériennes . . . . .	192
6.3.1	Fonction Bêta . . . . .	192
6.3.2	Fonction Gamma . . . . .	194
6.4	Exercices corrigés . . . . .	197
	<b>Bibliographie</b>	<b>215</b>

L'assimilation de bien de notions mathématiques requière d'abord la maîtrise de quelques notions sur les séries et les intégrales impropres. Leur rôle est essentiel dans l'étude de plusieurs techniques et concepts tels que : l'intégration de certaines équations différentielles, le calcul opérationnel, la notion de fonction analytiques, le calcul asymptotique, et bien d'autres ...

C'est en raison de cela que la place attribuée à ce cours dans le programme des années du tronc commun des filières de technologie, de sciences et d'informatique est d'une importance manifeste.

L'avantage de ce livre est de donner, d'une part, des démonstrations claires et rigoureuses sans faire usage de résultats hors programme et, d'autre part, faire suivre chaque chapitre d'une longue série d'exercices avec des solutions détaillées pour parfaire la compréhension du tout.

**Ouvrages déjà parus dans la même collection**









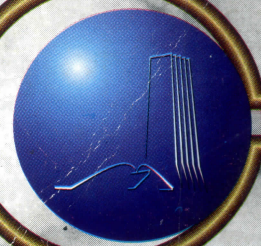
Arezki KESSI et Abdelouahab MAHMOUDI

**ELEMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE**  
**SÉRIES et INTÉGRALES**

**Cours et Exercices corrigés**

**Les**  
**Mathématiques**  
**à**  
**l'Université**

-  *Intégrales impropres*
-  *Séries numériques réelles*
-  *Suites et séries de fonctions  
d'une variable réelle*
-  *Séries entières*
-  *Séries de Fourier*
-  *Intégrales dépendant  
d'un paramètre*



Collection

Les Mathématiques à l'Université

*A. KESSI*

*A. MAHMOUDI*

# Éléments d'analyse Mathématique

# **SERIES ET INTEGRALES**

*Cours et Exercices Corrigés*

- Intégrales impropres*
- Séries numériques réelles*
- Suites et séries de fonctions d'une variable réelle*
- Séries entières*
- Séries de Fourier*
- Intégrales dépendant d'un paramètre*



*Idc 2452  $\frac{1}{1}$*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Intégrales impropres</b>	<b>1</b>
1.1	Notions générales	1
1.2	Formules d'intégration des intégrales impropres	3
1.2.1	Utilisation d'une primitive	3
1.2.2	Linéarité des intégrales impropres	3
1.2.3	Inégalité des intégrales	4
1.2.4	Intégration par parties	4
1.2.5	Changement de variable	4
1.2.6	Exemples de base	4
1.3	Convergence des intégrales impropres	6
1.3.1	Critère de Cauchy	6
1.3.2	Convergence absolue d'une intégrale impropre	7
1.3.3	Intégrales impropres des fonctions positives	8
1.3.4	Intégrales impropres semi-convergentes	13
1.3.5	Formules de la moyenne	13
1.3.6	Critère d'Abel-Dirichlet pour les intégrales	15
1.3.7	Valeur principale d'une intégrale divergente	16
1.4	Exercices corrigés	19
<b>2</b>	<b>Séries numériques réelles</b>	<b>49</b>
2.1	Progression géométrique	49
2.1.1	Notions générales	49
2.1.2	Progression infinie	50
2.1.3	Transformations élémentaires des progressions	51
2.2	Notions générales sur les séries numériques	52
2.3	Séries à termes positifs	56
2.3.1	Critères de comparaison	56
2.3.2	Règle de D'Alembert et règle de Cauchy	58
2.3.3	Comparaison d'une série avec une intégrale	60
2.3.4	Comparaison avec les séries de Riemann	61
2.4	Séries à termes de signe quelconque	61
2.4.1	Séries absolument convergentes	61
2.4.2	Séries semi-convergentes	64
2.4.3	Critères de convergence pour les séries à termes de signe quelconque	66
2.5	Complément sur les séries numériques	69
2.5.1	Règle de Duhamel	69
2.5.2	Critère de Kummer	70
2.5.3	Critère de Raabe	71
2.5.4	Critère de Bertrand	72

2.5.5	Critère de Gauss	73
2.6	Exercices corrigés	73
<b>3</b>	<b>Suites et séries de fonctions d'une variable réelle</b>	<b>101</b>
3.1	Progression géométrique	101
3.1.1	Introduction	101
3.1.2	Intégration d'une progression géométrique	102
3.1.3	Dérivation d'une série géométrique	103
3.2	Convergence des suites et séries de fonctions	103
3.2.1	Convergence simple des suites et séries de fonctions	103
3.2.2	Convergence uniforme des suites de fonctions	104
3.2.3	Convergence uniforme des séries de fonctions	107
3.2.4	Propriétés des suites et séries de fonctions uniformément convergentes	110
3.3	Exercices corrigés	115
<b>4</b>	<b>Séries entières</b>	<b>129</b>
4.1	Généralités	129
4.2	Convergence uniforme des séries entières	132
4.3	Opérations sur les séries entières	133
4.4	Dérivation et intégration des séries entières	134
4.5	Développement d'une fonction en série entière	135
4.5.1	Unicité du développement d'une fonction en série entière	135
4.5.2	Conditions suffisantes	135
4.5.3	Développement en série entière de fonctions usuelles	135
4.6	Exercices corrigés	135
<b>5</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>15</b>
5.1	Notions générales	15
5.1.1	Périodes d'une fonction périodique	15
5.2	Séries trigonométriques-Séries de Fourier	15
5.2.1	Propriétés du système trigonométrique; série de Fourier	15
5.2.2	Développement en séries de Fourier des fonctions paires et impaires	15
5.2.3	Développement de fonctions en séries de Fourier sur $[-\pi, \pi]$	15
5.2.4	Convergence des séries de Fourier	15
5.2.5	Approximation en moyenne quadratique - Egalité de Parseval	15
5.3	Exercices corrigés	15
<b>6</b>	<b>Intégrales dépendant d'un paramètre</b>	<b>1</b>
6.1	Intégrales propres dépendant d'un paramètre	1
6.2	Intégrales impropres dépendant d'un paramètre	1
6.2.1	Notion de convergence uniforme	1
6.2.2	Critères de convergence	1
6.2.3	Propriétés des intégrales uniformément convergentes	1
6.3	Fonctions eulériennes	1
6.3.1	Fonction Bêta	1
6.3.2	Fonction Gama	1
6.4	Exercices corrigés	1

L'assimilation de bien de notions mathématiques requière d'abord la maîtrise de quelques notions sur les séries et les intégrales impropres. Leur rôle est essentiel dans l'étude de plusieurs techniques et concepts tels que : l'intégration de certaines équations différentielles, le calcul opérationnel, la notion de fonction analytiques, le calcul asymptotique, et bien d'autres ...

C'est en raison de cela que la place attribuée à ce cours dans le programme des années du tronc commun des filières de technologie, de sciences et d'informatique est d'une importance manifeste.

L'avantage de ce livre est de donner, d'une part, des démonstrations claires et rigoureuses sans faire usage de résultats hors programme et, d'autre part, faire suivre chaque chapitre d'une longue série d'exercices avec des solutions détaillées pour parfaire la compréhension du tout.

**Ouvrages déjà parus dans la même collection**

