

# MATHÉMATIQUES à l'Université

Exercices et problèmes corrigés

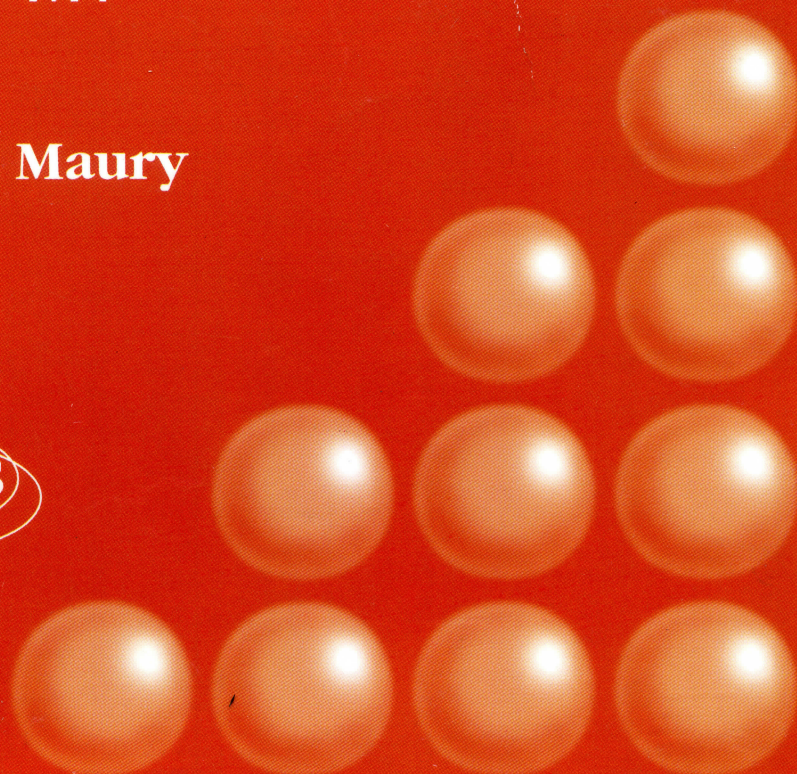
Collection dirigée par  
Charles-Michel Marle  
Philippe Pilibossian

## Analyse fonctionnelle

 *niveau M1*

**Bertrand Maury**

 ellipses



M 527 / 3

# MATHÉMATIQUES À L'UNIVERSITÉ

Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILBOSSIAN

niveau M1

# ANALYSE FONCTIONNELLE

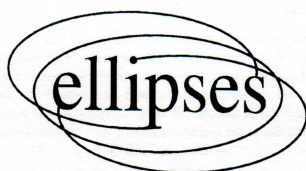
*Exercices et problèmes corrigés*

Bertrand MAURY

Professeur à l'Université Paris-Sud  
Laboratoire de Mathématiques CNRS UMR 8628 (Orsay)  
Bertrand.Maury@math.u-psud.fr



25089  $\frac{3}{10}$



# MATHÉMATIQUES à l'Université

Exercices et problèmes corrigés

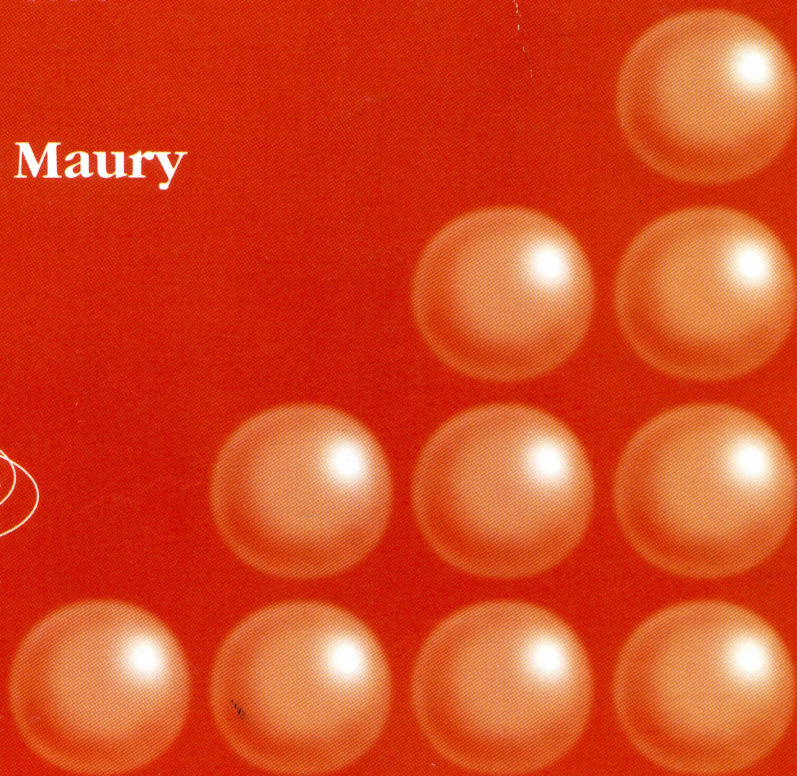
Collection dirigée par  
Charles-Michel Marle  
Philippe Pilibossian

## Analyse fonctionnelle

 *niveau M1*

**Bertrand Maury**

 ellipses



M 527 / 3

# MATHÉMATIQUES À L'UNIVERSITÉ

Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILBOSSIAN

**niveau M1**

# ANALYSE FONCTIONNELLE

*Exercices et problèmes corrigés*



**Bertrand MAURY**

Professeur à l'Université Paris-Sud  
Laboratoire de Mathématiques CNRS UMR 8628 (Orsay)  
Bertrand.Maury@math.u-psud.fr

25089  $\frac{3}{10}$



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Rappels de cours</b>	<b>1</b>
1	Espaces métriques, espaces vectoriels normés . . . . .	1
1.1.	Espaces métriques . . . . .	1
1.2.	Espaces vectoriels normés . . . . .	2
2	Complétude . . . . .	2
3	Convexité . . . . .	4
3.1.	Définitions . . . . .	4
3.2.	Théorèmes de Hahn-Banach . . . . .	4
3.3.	Fonctions convexes s.c.i. . . . .	5
4	Convergence faible, espaces réflexifs . . . . .	6
4.1.	Définitions . . . . .	6
4.2.	Extraction de sous-suites faiblement convergentes . . . . .	7
4.3.	Convergence faible et convexité . . . . .	7
4.4.	Opérateurs compacts . . . . .	7
5	Espaces de Hilbert . . . . .	8
5.1.	Définitions, propriétés . . . . .	8
5.2.	Théorème de Lax-Milgram . . . . .	9
6	Espaces $L^p$ . . . . .	10
7	Espaces de Sobolev . . . . .	11
7.1.	L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ . . . . .	11
7.2.	Cas particulier de la dimension 1 . . . . .	12
<b>II</b>	<b>Exercices</b>	<b>13</b>
1	Espaces métriques, espaces vectoriels normés . . . . .	13
2	Complétude . . . . .	13
3	Convexité . . . . .	14
4	Convergence faible, espaces réflexifs . . . . .	15
5	Espaces de Hilbert . . . . .	15
6	Espaces $L^p$ . . . . .	16
7	Espaces de Sobolev . . . . .	16
<b>III</b>	<b>Corrigés des exercices</b>	<b>17</b>
1	Espaces métriques, espaces vectoriels normés . . . . .	17
2	Complétude . . . . .	19
3	Convexité . . . . .	20
4	Convergence faible, espaces réflexifs . . . . .	23
5	Espaces de Hilbert . . . . .	24
6	Espaces $L^p$ . . . . .	26
7	Espaces de Sobolev . . . . .	27

<b>IV Problèmes</b>	<b>29</b>
1 Extraction diagonale . . . . .	29
2 Espaces $\ell^p$ . . . . .	30
3 Dual d'un s.e.v fermé . . . . .	32
4 Dual d'un s.e.v dense . . . . .	33
5 Mesures, fonctions à variation bornée . . . . .	34
6 Convexifiée . . . . .	36
7 Cône polaire . . . . .	37
8 Formulation point-selle . . . . .	40
9 Cône asymptote . . . . .	43
10 Problème adjoint . . . . .	44
11 Méthode de pénalisation . . . . .	46
12 Pénalisation : formulation abstraite . . . . .	48
13 Homogénéisation . . . . .	50
14 Perturbation singulière . . . . .	52
15 Théorème de Browder . . . . .	54
16 De Brouwer à Schauder . . . . .	55
17 Balayage d'une mesure . . . . .	57
18 Dégénérescence d'ellipticité . . . . .	58
19 Introduction à la méthode des éléments finis . . . . .	60
20 Questions croisées, extensions . . . . .	62
<b>V Corrigés des problèmes</b>	<b>63</b>
1 Extraction diagonale . . . . .	63
2 Espaces $\ell^p$ . . . . .	65
3 Dual d'un s.e.v fermé . . . . .	71
4 Dual d'un s.e.v dense . . . . .	72
5 Mesures, fonctions à variation bornée . . . . .	74
6 Convexifiée . . . . .	80
7 Cône polaire . . . . .	81
8 Formulation point-selle . . . . .	89
9 Cône asymptote . . . . .	96
10 Problème adjoint . . . . .	99
11 Méthode de pénalisation . . . . .	100
12 Pénalisation : formulation abstraite . . . . .	103
13 Homogénéisation . . . . .	106
14 Perturbation singulière . . . . .	109
15 Théorème de Browder . . . . .	116
16 De Brouwer à Schauder . . . . .	118
17 Balayage d'une mesure . . . . .	119
18 Dégénérescence d'ellipticité . . . . .	122
19 Introduction à la méthode des éléments finis . . . . .	128
20 Questions croisées, extensions . . . . .	131

La collection *Mathématiques à l'Université* se propose de mettre à la disposition des étudiants de troisième, quatrième et cinquième années d'études supérieures en mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Cet ouvrage s'adresse en premier lieu aux étudiants de Mastère en mathématiques et mathématiques appliquées, mais il pourra également intéresser les chercheurs désireux de se familiariser avec certains aspects de l'Analyse fonctionnelle. Il a pour objectif fondamental de guider l'étudiant dans la résolution de problèmes parfois difficiles avec le minimum d'outils théoriques de base, clairement définis.

La partie théorique, concise, est ainsi constituée de rappels des théorèmes et définitions essentiels, suivis d'exercices leur correspondant et de leurs corrigés. De la même manière systématique et didactique, 20 problèmes d'Analyse fonctionnelle sont énoncés puis résolus de façon détaillée.



9 782729 819255

ISBN 2-7298-1925-8