

*Enseignement des mathématiques*

# Introduction à l'analyse numérique

Jacques Rappaz  
Marco Picasso

Presses polytechniques et universitaires romandes

Enseignement des mathématiques

M 524

# Introduction à l'analyse numérique

048226  
③

Jacques Rappaz  
Marco Picasso



*Enseignement des mathématiques*

# Introduction à l'analyse numérique

Jacques Rappaz  
Marco Picasso

Presses polytechniques et universitaires romandes

*Enseignement des mathématiques*

M 524

# Introduction à l'analyse numérique

048226  
③

Jacques Rappaz  
Marco Picasso



# Table des matières

<b>1 Problèmes d'interpolation</b>	<b>1</b>
1.1 Position du problème . . . . .	1
1.2 Base de Lagrange . . . . .	2
1.3 Interpolation de Lagrange . . . . .	3
1.4 Interpolation d'une fonction continue par un polynôme . . . . .	4
1.5 Interpolation d'Hermite . . . . .	7
1.6 Interpolation par intervalles . . . . .	9
1.7 Exercices . . . . .	12
1.8 Notes bibliographiques et remarques . . . . .	15
<b>2 Dérivation numérique</b>	<b>17</b>
2.1 Dérivées numériques d'ordre 1 et erreur de troncature . . . . .	17
2.2 Dérivées numériques d'ordre 1 et erreur d'arrondis . . . . .	19
2.3 Dérivées numériques d'ordre 1 et erreurs . . . . .	22
2.4 Dérivées numériques d'ordre supérieur . . . . .	23
2.5 Dérivées numériques et interpolation . . . . .	24
2.6 Extrapolation de Richardson . . . . .	25
2.7 Exercices . . . . .	27
2.8 Notes bibliographiques et remarques . . . . .	31
<b>3 Intégration numérique. Formules de quadrature</b>	<b>33</b>
3.1 Généralités . . . . .	33
3.2 Poids d'une formule de quadrature . . . . .	37
3.3 Formule du rectangle . . . . .	40
3.4 Formule de Simpson . . . . .	41
3.5 Formules de Gauss-Legendre . . . . .	42
3.6 Exercices . . . . .	46
3.7 Notes bibliographiques et remarques . . . . .	50
<b>4 Résolution de systèmes linéaires. Elimination de Gauss.</b>	
<b>Systèmes mal conditionnés. Systèmes surdéterminés</b>	<b>51</b>
4.1 Position du problème . . . . .	51
4.2 Elimination de Gauss sur un exemple . . . . .	52
4.3 Algorithme d'élimination . . . . .	53
4.4 Nombre d'opérations pour l'élimination de Gauss . . . . .	57
4.5 Elimination de Gauss avec changement de pivot . . . . .	58

4.6	Systèmes mal conditionnés . . . . .	60
4.7	Systèmes surdéterminés. Méthode des moindres carrés . . . . .	64
4.8	Exercices . . . . .	66
4.9	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Décomposition <math>LU</math>. Décomposition de Cholesky</b>	<b>69</b>
5.1	Décomposition $LU$ . . . . .	69
5.2	Utilité de la décomposition $LU$ . . . . .	72
5.3	Décomposition $LU$ avec changement de pivot . . . . .	74
5.4	Matrices symétriques définies positives. Décomposition de Cholesky . . . . .	75
5.5	Matrices de bande . . . . .	78
5.6	Exercices . . . . .	80
5.7	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Résolution de systèmes linéaires par des méthodes itératives</b>	<b>85</b>
6.1	Généralités. Méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel . . . . .	85
6.2	Un exemple . . . . .	89
6.3	Méthodes de relaxation, méthode SSOR . . . . .	90
6.4	Méthodes du gradient et du gradient conjugué . . . . .	92
6.5	Exercices . . . . .	98
6.6	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Méthodes numériques pour le calcul des valeurs propres d'une matrice symétrique</b>	<b>105</b>
7.1	Généralités . . . . .	105
7.2	Méthode de la puissance . . . . .	107
7.3	Méthode de la puissance inverse . . . . .	109
7.4	Méthode de Jacobi . . . . .	111
7.5	Exercices . . . . .	114
7.6	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Equations et systèmes d'équations non linéaires</b>	<b>119</b>
8.1	Equations non linéaires : généralités . . . . .	119
8.2	Méthodes de point fixe : généralités . . . . .	121
8.3	Méthode de Newton et méthode de la corde . . . . .	124
8.4	Systèmes non linéaires . . . . .	127
8.5	Exercices . . . . .	130
8.6	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	134
<b>9</b>	<b>Equations différentielles</b>	<b>137</b>
9.1	Equations différentielles du premier ordre : généralités . . . . .	137
9.2	Problèmes numériquement mal posés . . . . .	140
9.3	Schémas d'Euler . . . . .	141
9.4	Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 . . . . .	145
9.5	Méthode de Runge-Kutta classique . . . . .	146
9.6	Systèmes différentiels du premier ordre . . . . .	147

9.7	Equations différentielles d'ordre supérieur . . . . .	148
9.8	Exercices . . . . .	151
9.9	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	154
<b>10</b>	<b>Différences finies et éléments finis</b>	
	<b>pour des problèmes aux limites unidimensionnels</b>	<b>155</b>
10.1	Un problème aux limites unidimensionnel . . . . .	155
10.2	Méthode des différences finies . . . . .	156
10.3	Méthode de Galerkin . . . . .	157
10.4	Méthode d'éléments finis de degré 1 . . . . .	161
10.5	Méthode d'éléments finis de degré 2 . . . . .	165
10.6	Approximation par différences finies d'un problème aux limites non linéaire . . . . .	167
10.7	Exercices . . . . .	169
10.8	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	173
<b>11</b>	<b>Une méthode d'éléments finis pour l'approximation de problèmes elliptiques</b>	<b>175</b>
11.1	Problèmes elliptiques et formulation variationnelle . . . . .	175
11.2	Éléments finis triangulaires de degré 1 . . . . .	179
11.3	Un exemple particulier . . . . .	181
11.4	Estimations d'erreurs et méthodes de degré supérieur . . . . .	185
11.5	Exercices . . . . .	186
11.6	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	193
<b>12</b>	<b>Approximation des problèmes paraboliques.</b>	
	<b>Problème de la chaleur</b>	<b>195</b>
12.1	Equation de la chaleur 1D et différences finies . . . . .	195
12.2	Equation de la chaleur 1D et éléments finis . . . . .	198
12.3	Problèmes paraboliques 2D et leurs approximations . . . . .	202
12.4	Un exemple particulier . . . . .	204
12.5	Exercices . . . . .	205
12.6	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	208
<b>13</b>	<b>Approximation de problèmes hyperboliques.</b>	
	<b>Equation de transport et équation des ondes</b>	<b>209</b>
13.1	Equation de transport 1D et différences finies . . . . .	209
13.2	Equation des ondes 1D et différences finies . . . . .	213
13.3	Equations des ondes 2D et éléments finis . . . . .	218
13.4	Equation de transport 1D non linéaire . . . . .	220
13.5	Exercices . . . . .	222
13.6	Notes bibliographiques et remarques . . . . .	226
<b>14</b>	<b>Approximation de problèmes de convection-diffusion</b>	<b>229</b>
14.1	Un problème de convection-diffusion stationnaire et différences finies . . . . .	229
14.2	Un problème de convection-diffusion stationnaire et éléments finis . . . . .	234

14.3 Problèmes bidimensionnels de convection-diffusion . . . . .	237
14.4 Exercices . . . . .	239
14.5 Notes bibliographiques et remarques . . . . .	244

# Introduction à l'analyse numérique

Cet ouvrage présente une introduction aux notions mathématiques nécessaires à l'utilisation des méthodes numériques employées dans les sciences de l'ingénieur. ■ La plupart des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques, issus de la technologie moderne, sont régis par des systèmes complexes d'équations aux dérivées partielles. La résolution numérique de ces systèmes d'équations au moyen d'un ordinateur nécessite des connaissances approfondies en mathématiques. Ce livre a donc pour but de fournir au lecteur les notions mathématiques de base qui lui permettront d'aborder ce sujet. ■ L'ouvrage s'adresse tout particulièrement aux étudiants du 1er cycle universitaire en sciences de l'ingénieur, en physique et en mathématiques, ainsi qu'à tous ceux qui désirent s'initier à la simulation numérique et au calcul scientifique.



De nationalité suisse, **Jacques Rappaz** est né en 1947 à Lausanne. Il obtient un diplôme d'ingénieur physicien à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne en 1971 et soutient sa thèse de doctorat consacrée à l'approximation spectrale d'opérateurs provenant de la physique des plasmas en 1976. Après sa thèse, il poursuit ses recherches en analyse numérique à l'Ecole Polytechnique de Paris où il séjourne trois ans. De retour à l'EPFL, il occupe un poste d'adjoint scientifique au département de mathématiques et oriente une partie de ses recherches vers des applications industrielles. En 1985, il est nommé professeur d'analyse numérique à l'Université de Neuchâtel. Depuis 1987, il est professeur à l'EPFL où il enseigne l'analyse et l'analyse numérique. Sa recherche est orientée sur les aspects théoriques et pratiques de la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Il dirige plusieurs projets en collaboration avec les milieux industriels et il est auteur ou co-auteur de nombreuses publications dans ce domaine.

De nationalité française, **Marco Picasso** est né en 1963 en Italie. Il obtient un diplôme d'ingénieur ECAM de Lyon en 1986, puis le DESS d'ingénierie mathématiques et calcul scientifique de l'Université de Besançon en 1987. En 1988, il entreprend un travail de recherche dans le groupe du Professeur Jacques Rappaz, en collaboration avec le département des matériaux de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. En 1992, il soutient sa thèse de doctorat concernant la simulation numérique des traitements de surface par laser. Depuis 1993, il est responsable du calcul scientifique au sein de la chaire d'analyse et simulation numérique du département de mathématiques de l'EPFL. Actuellement, il est chargé de cours pour l'enseignement de l'analyse numérique aux ingénieurs.

ISBN 978-2-88074-851-7



9 782880 748517