

# MATHÉMATIQUES

## 2<sup>e</sup> cycle

Collection dirigée par  
Charles-Michel Marle  
Philippe Pilibossian

# Topologie

Gilles Christol  
Anne Cot  
Charles-Michel Marle

ellipses



M7518

# MATHÉMATIQUES POUR LE 2<sup>E</sup> CYCLE

Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILIBOSSIAN

054131  
⑤

# TOPOLOGIE



Gilles CHRISTOL

Professeur  
Université Pierre et Marie Curie  
(Paris VI)

Anne COT

Professeur agrégé  
Université de Versailles-Saint Quentin

Charles-Michel MARLE

Professeur  
Université Pierre et Marie Curie  
(Paris VI)



# Table des matières

Notations . . . . .	viii
Chapitre préliminaire. Ensembles, relations, applications . . . . .	1
1 Qu'est-ce qu'une théorie mathématique? . . . . .	1
2 La théorie des ensembles . . . . .	4
3 Groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels . . . . .	11
4 Exercices . . . . .	13
5 Solutions . . . . .	14
Chapitre premier. Notions de base de la Topologie . . . . .	17
1 Un cas particulier : les espaces métriques . . . . .	17
2 Espaces topologiques; propriétés élémentaires . . . . .	22
3 Applications continues . . . . .	26
4 Exercices . . . . .	28
5 Solutions . . . . .	32
Chapitre II. Construction de topologies . . . . .	41
1 Comparaison de topologies . . . . .	41
2 Sous-espaces topologiques . . . . .	42
3 Espaces topologiques produits . . . . .	43
4 Espaces topologiques quotients . . . . .	47
5 Topologies initiales et topologies finales . . . . .	48
6 Exercices . . . . .	51
7 Solutions . . . . .	53
Chapitre III. Limites et valeurs d'adhérence . . . . .	58
1 Suites dans un espace topologique . . . . .	58
2 Limite et valeurs d'adhérence d'une application . . . . .	59
3 Filtres . . . . .	62
4 Exercices . . . . .	65
5 Solutions . . . . .	65
Chapitre IV. Espaces compacts et localement compacts . . . . .	68
1 La compacité : définition et propriétés élémentaires . . . . .	68
2 Espaces compacts et applications continues . . . . .	69
3 Produits d'espaces compacts . . . . .	70
4 Espaces localement compacts . . . . .	72
5 Exercices . . . . .	73
6 Solutions . . . . .	74
Chapitre V. Espaces connexes . . . . .	78
1 Définition et exemples . . . . .	78
2 Quelques propriétés des connexes . . . . .	79
3 Composantes connexes . . . . .	80
4 La connexité par arcs . . . . .	81
5 Espaces localement connexes . . . . .	82
6 Quelques applications de la connexité . . . . .	82
7 Exercices . . . . .	83
8 Solutions . . . . .	84

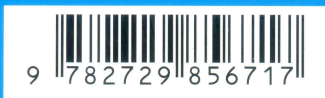
Chapitre VI. Espaces métriques et semi-métriques . . . . .	87
1 Topologie des espaces métriques . . . . .	87
2 Espaces métriques et continuité uniforme . . . . .	89
3 Suites de Cauchy, espaces complets . . . . .	91
4 Le théorème du point fixe . . . . .	95
5 Espaces semi-métriques et espaces uniformes . . . . .	97
6 Espaces uniformes complets . . . . .	100
7 Exercices . . . . .	102
8 Solutions . . . . .	105
Chapitre VII. Notions sur les espaces de Baire . . . . .	111
1 La propriété de Baire . . . . .	111
2 Exemples importants d'espaces de Baire . . . . .	112
3 Fonctions continues et semi-continues sur un espace de Baire . . . . .	113
4 Quelques applications . . . . .	114
5 Exercices . . . . .	115
6 Solutions . . . . .	116
Chapitre VIII. Espaces d'applications ou de fonctions . . . . .	118
1 Convergence simple et convergence uniforme . . . . .	118
2 Autres structures uniformes sur des espaces d'applications . . . . .	121
3 Familles équicontinues . . . . .	122
4 Le théorème de Stone-Weierstrass . . . . .	126
5 Exercices . . . . .	130
6 Solutions . . . . .	130
Chapitre IX. Espaces vectoriels normés . . . . .	132
1 Norme sur un espace vectoriel . . . . .	132
2 Applications linéaires continues . . . . .	135
3 Applications multilinéaires continues . . . . .	141
4 Séries dans un espace vectoriel normé . . . . .	145
5 Quelques résultats concernant les espaces de Banach . . . . .	148
6 Exercices . . . . .	150
7 Solutions . . . . .	154
Chapitre X. Espaces de Hilbert . . . . .	163
1 Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes . . . . .	163
2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert . . . . .	164
3 Orthogonalité . . . . .	166
4 Les théorèmes de projection . . . . .	166
5 Dual d'un espace de Hilbert . . . . .	169
6 Systèmes orthogonaux et bases hilbertiennes . . . . .	170
7 Exemples d'espaces de Hilbert et de bases hilbertiennes . . . . .	173
8 Exercices . . . . .	177
9 Solutions . . . . .	177
Bibliographie commentée . . . . .	179
1 Conseils de lecture . . . . .	179
2 Références . . . . .	180
Index . . . . .	181

La collection *Mathématiques 2<sup>e</sup> cycle* se propose de mettre à la disposition des étudiants de licence et de maîtrise de mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

---

Les enseignements de deuxième cycle de mathématiques comportent une importante partie d'analyse : calcul différentiel, calcul intégral, fonctions d'une variable complexe, analyse numérique,... Les quelques notions concernant la Topologie générale et les espaces vectoriels normés exposées dans le présent volume sont abondamment utilisées dans toutes ses branches des mathématiques ; il est donc important de bien les assimiler. Elles sont présentées de manière simple et accessible, sans sacrifier la rigueur ni la généralité. Les nombreux exercices proposés sont suivis de leurs solutions complètes.



ISBN 2-7298-5671-4