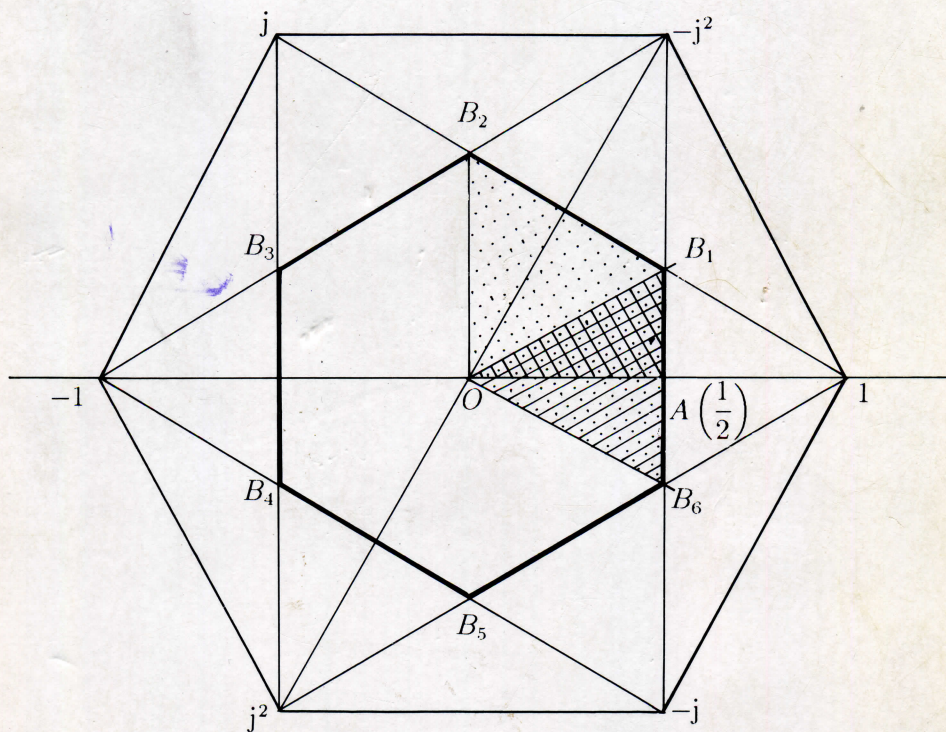


GROUPES, ALGÈBRES ET GÉOMÉTRIE

Tome 2



Jean-Marie ARNAUDIÈS

José BERTIN

ellipses

M 315/T2

GROUPES, ALGÈBRES ET GÉOMÉTRIE

Tome 2

Jean-Marie ARNAUDIÈS

Maître de conférences à l'université
Pierre et Marie Curie (Paris)

José BERTIN

Professeur à l'université
de Grenoble (Institut Fourier)



24503 1/2



Table des matières

Notations

Chapitre XI. Le produit tensoriel

- XI.1 Dimension des modules sur un anneau commutatif
- XI.2 Modules et algèbres : généralités
- XI.3 Le produit tensoriel
- XI.4 Propriétés fondamentales du produit tensoriel
- XI.5 Extension des scalaires dans le cas commutatif

Exercices du chapitre XI

Chapitre XII. Algèbres tensorielles, extérieures et symétriques

- XII.1 Algèbres graduées
- XII.2 Algèbres associatives libres, algèbres universelles
- XII.3 Algèbres définies par générateurs et relations
- XII.4 L'algèbre symétrique d'un module
- XII.5 Actions de \mathfrak{S}_n sur $T^n(M)$ et $ML_n(M; N)$
- XII.6 Algèbres extérieures
- XII.7 Calcul matriciel et algèbres extérieures
- XII.8 Algèbres extérieures des K -ev de dimension finie
- XII.9 Produit tensoriel d'algèbres
- XII.10 Algèbres universelles de modules

Exercices du chapitre XII

Chapitre XIII. Modules de type fini sur un anneau principal, réseaux

- XIII.1 Sous-modules des A -modules libres
- XIII.2 Réduction des matrices
- XIII.3 Les A -modules de type fini
- XIII.4 Les A -modules de torsion de type fini
- XIII.5 Composants primaires
- XIII.6 Application aux endomorphismes d'espaces vectoriels
- XIII.7 Application aux groupes abéliens
- XIII.8 Réseaux d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel
- XIII.9 Réseaux d'un \mathbb{R} -espace vectoriel
- XIII.10 Introduction à l'étude euclidienne des réseaux
- XIII.11 Notions sur les groupes topologiques
- XIII.12 Tores

Exercices du chapitre XIII

Chapitre XIV. Compléments d'algèbre bilinéaire	181
XIV.1 Espaces quadratiques, espaces symplectiques	181
XIV.2 Espaces bilinéaires hyperboliques	189
XIV.3 Le théorème de Witt, cas symétrique	194
XIV.4 Le théorème de Witt, cas alterné	200
XIV.5 Classification des espaces quadratiques	204
XIV.6 Espaces quadratiques et géométrie	212
XIV.7 La caractéristique 2	218
XIV.8 Formes sesquilinéaires	232
Exercices du chapitre XIV	243
Chapitre XV. Groupes classiques : exemples	247
XV.1 Groupe orthogonal en dimension 2	247
XV.2 La forme quadratique déterminant sur $\mathfrak{M}_2(K)$	253
XV.3 Groupes orthogonaux	257
XV.4 Groupes orthogonaux sur un corps fini	265
XV.5 Groupes symplectiques	267
XV.6 Groupes orthogonaux en caractéristique 2	275
Exercices du chapitre XV	283
Chapitre XVI. Groupes bilinéaires	285
XVI.1 La notion de groupe bilinéaire	285
XVI.2 Opérations sur les groupes bilinéaires	292
XVI.3 Discriminant, orthogonalité, isotropie	294
XVI.4 Le groupe discriminant	301
XVI.5 Les groupes A, D, E	308
XVI.6 Classification des groupes libres quadratiques	316
XVI.7 Classification des groupes finis quadratiques	324
XVI.8 Fonctions thêta	325
XVI.9 Equation fonctionnelle des fonctions thêta	330
XVI.10 Classification des groupes libres symplectiques	340
XVI.11 Classification des groupes finis symplectiques	342
Exercices du chapitre XVI	349

Chapitre XVII. Cristallographie	353
XVII.1 Actions d'un groupe topologique	354
XVII.2 Compléments sur les groupes affines	360
XVII.3 Compléments sur les groupes linéaires	364
XVII.4 Groupes cristallographiques d'isométries	370
XVII.5 Etude algébrique des groupes cristallographiques	380
XVII.6 Domaine fondamental, pavages polyédraux stricts	390
XVII.7 Cristalloïdes, classes de cristal	404
XVII.8 Les 17 groupes cristallographiques plans	422
XVII.9 Générateurs et relations, groupes triangulaires	434
XVII.10 Racines, groupes de Weyl d'un réseau	441
XVII.11 Les réseaux A et D	445
XVII.12 Le réseau E_8	450
Exercices du chapitre XVII	455
Chapitre XVIII. Algèbres de dimension finie sur un corps commutatif	463
XVIII.1 Introduction	463
XVIII.2 L'algèbre $\text{Hom}_K(V)$	467
XVIII.3 Modules simples, modules indécomposables	470
XVIII.4 Radical, algèbres semi-simples	476
XVIII.5 Algèbres simples	482
XVIII.6 Les théorèmes de structure	492
XVIII.7 Algèbres simples centrales	500
XVIII.8 Changement de corps de base	507
XVIII.9 Normes et traces	515
XVIII.10 Représentations linéaires	522
Exercices du chapitre XVIII	537

Chapitre XIX. Exemples d'algèbres	541
XIX.1 L'algèbre d'un groupe fini	541
XIX.2 Algèbres de Hecke	549
XIX.3 Algèbre de Hecke et groupe linéaire	556
XIX.4 Algèbres de quaternions	563
XIX.5 Algèbres cycliques	571
XIX.6 Quaternions et géométrie	578
XIX.7 Groupes polyédraux binaires	583
XIX.8 Le théorème de Jordan-Zassenhaus	592
XIX.9 Sous-groupes finis de $GL(n, \mathbf{Z})$	604
Exercices du chapitre XIX	604
Chapitre XX. Représentation des groupes finis	611
XX.1 Représentation et $K\{G\}$ -modules	611
XX.2 Représentation et produit tensoriel	618
XX.3 Orthogonalité des caractères	623
XX.4 Théorèmes fondamentaux sur les caractères	628
XX.5 Premiers exemples	637
XX.6 Restriction et induction des représentations	650
XX.7 Groupe quaternionique, groupes polyédraux	657
XX.8 Partitions d'entiers, tableaux de Young	667
XX.9 Construction de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n	678
Exercices du chapitre XX	696
Chapitre XXI. Invariants des groupes finis, fonctions symétriques	705
XXI.1 Théorème de finitude de Hilbert-Noether	705
XXI.2 La série de Hilbert-Poincaré	710
XXI.3 Polynômes symétriques	712
XXI.4 Séries génératrices et fonctions symétriques	717
XXI.5 Les polynômes de Schur	723
XXI.6 Démonstration du théorème de Frobenius	737
Exercices du chapitre XXI	745

Ce tome 2 est consacré à la pénétration des méthodes algébriques en Géométrie. Jean-Marie Arnaudiès et José Bertin tiennent les promesses faites non seulement aux candidats aux Agrégations externe et interne de Mathématiques, mais au-delà, à tous ceux que passionnent cette science ou qui s'y destinent, comme les étudiants de deuxième et troisième cycle des Universités.

Les auteurs ont bâti ce tome 2 autour de deux théories majeures : la cristallographie, et la représentation linéaire des groupes finis, qui mettent en œuvre tous les outils algébriques progressivement introduits : produit tensoriel, groupes topologiques, modules sur les anneaux principaux, réseaux, algèbres semi-simples...

De nombreux exemples, dont beaucoup non-évidents, appuient le texte. En outre, les auteurs démontrent cinq grands théorèmes qui ne sont que très rarement mis à la disposition d'un public aussi large : les deux théorèmes de Bieberbach en cristallographie (le topologique, et celui de finitude), les théorèmes de finitude de Hermite-Minkowski et de Jordan-Zassenhaus, et enfin le théorème de Frobenius qui donne le calcul explicite des caractères irréductibles des groupes symétriques ; ce dernier théorème couronne une étude minutieuse et exhaustive des représentations des groupes symétriques.

Ce livre contient notamment : 329 théorèmes, 218 propositions, 115 corollaires et 65 lemmes, avec leur démonstration ; 161 définitions et 106 exemples développés. Il est illustré de 36 figures.



9 782729 845940

ISBN 2-7298-4594-1