

24508/2

U N I V E R S I T É S

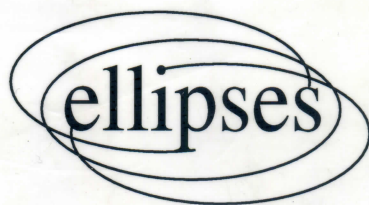


U N I V E R S I T É S

MATHÉMATIQUES
A P P L I Q U É E S

*Initiation
à la programmation
linéaire
et à l'algorithme
du simplexe*

Claude BREZINSKI



M 513

UNIVERSITÉS

MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES



Initiation à la programmation linéaire et à l'algorithme du simplexe

Claude BREZINSKI

Professeur à l'Université des sciences et technologies de Lille

E-mail : Claude.Brezinski@univ-lille1.fr

24508 $\frac{2}{2}$

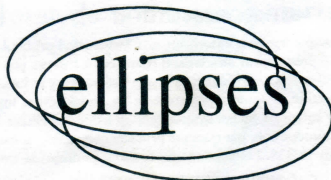


TABLE DES MATIÈRES

1	Présentation générale	1
2	Introduction à la programmation linéaire	3
2.1	Vocabulaire et premiers résultats	3
2.2	La modélisation	8
2.2.1	Exemple 1	8
2.2.2	Exemple 2	9
2.2.3	Exemple 3	10
2.2.4	Exemple 4	12
2.2.5	Exemple 5	13
2.2.6	Exemple 6	14
2.2.7	Exercice	15
3	Solution graphique et algorithme du simplexe	17
3.1	Solution graphique	17
3.2	Le tableau du simplexe	20
3.3	L'algorithme du simplexe	21
3.4	Exemples	24
3.4.1	Exemple 1	24
3.4.2	Exemple 2	29
3.4.3	Exemple 3	30
3.4.4	Exemple 4	32
3.4.5	Exemple 5	33
3.4.6	Exercice	34
3.5	Détermination du sommet initial	34
3.5.1	Exemple 1	36
3.5.2	Exemple 2	38
3.5.3	Exercice 1	41
3.5.4	Exercice 2	41
4	Présentation théorique de l'algorithme du simplexe	43
4.1	Formalisation de l'algorithme du simplexe	43
4.2	Définitions, notations et résultats préliminaires	45
4.3	Description de l'algorithme du simplexe	48
4.4	Autres définitions et résultats	48
4.5	Une étape de l'algorithme	49
4.5.1	Passage d'un sommet au suivant	49
4.5.2	Mise en œuvre	51
4.5.3	Choix du sommet initial	53

4.5.4	Disposition pratique	53
4.6	Exemples	55
4.6.1	Exemple 1	55
4.6.2	Exemple 2	58
4.6.3	Exemple 3	59
4.6.4	Exemple 4	59
4.6.5	Exemple 5	60
5	La dualité	63
5.1	Programme primal, programme dual	63
5.2	Propriétés de la dualité	65
5.2.1	Le théorème de dualité	68
5.2.2	Les écarts complémentaires	69
5.3	Applications de la dualité	70
5.3.1	Variation de production	70
5.3.2	Jeu à deux joueurs	71
6	Exercices	75
7	Appendice	77
7.1	Résolution des systèmes linéaires	77
7.1.1	La méthode de Gauss	79
7.1.2	La méthode de Gauss-Jordan	80
7.2	Rappels d'algèbre matricielle	81
7.3	Complexité des calculs matriciels	84
8	Bibliographie sommaire	87
8.1	Commentaires	87
8.2	Bibliographie	87
	Index	89

La programmation linéaire est la branche des mathématiques qui étudie la résolution optimale de certains problèmes d'optimisation avec contraintes. Elle est utilisée, en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique pour l'allocation de ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés. Les problèmes de programmation linéaire se résolvent grâce à l'algorithme du simplexe.

Ce livre est une initiation à ce domaine des mathématiques appliquées. Après une introduction à la programmation linéaire, les premières définitions sont formulées et on expose comment modéliser un problème concret. Ensuite, on explique comment un programme linéaire peut être résolu graphiquement. Puis on montre comment passer de cette résolution graphique à une résolution algébrique, ce qui ouvre la voie à l'algorithme du simplexe. Ses règles essentielles sont peu à peu dégagées sur des exemples. Elles sont ensuite formalisées par étapes afin d'arriver jusqu'à la présentation théorique de l'algorithme.

Ce livre ne nécessite aucune connaissance préalable et, afin de pouvoir être abordés par le plus large public possible, les développements théoriques y sont réduits au minimum.

Au fur et à mesure des chapitres, de nombreux exemples et exercices illustrent les diverses questions étudiées.

Ce livre, qui peut être abordé dès la première année des études supérieures, s'adresse à tous les étudiants des universités et des écoles, en mathématiques, informatique, économétrie, commerce, etc., dont la formation inclut l'apprentissage de la programmation mathématique et de l'optimisation.

Claude Brezinski est professeur à l'université des sciences et technologies de Lille où il dirige le laboratoire d'analyse numérique et d'optimisation.

Illustration de couverture :
C. Monet, *La pie*, 1869.



ISBN 2-7298-1013-7

U
N
I
V
E
R
S
I
T
É
S