

24494/1

MATHÉMATIQUES

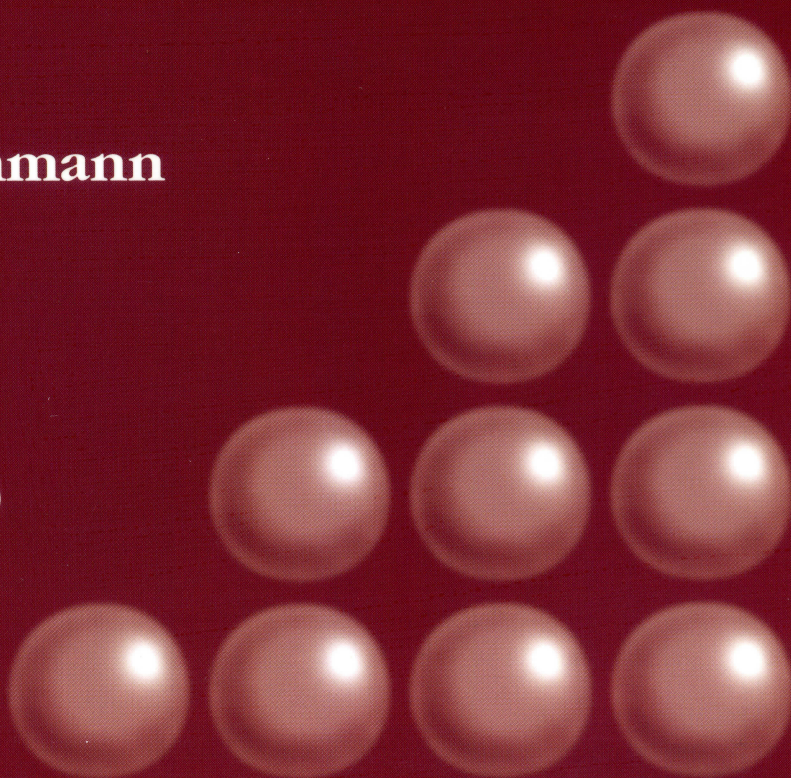
2^e cycle

Cours et exercices

Collection dirigée par
Charles-Michel Marle
Philippe Pilibossian

Une introduction à la géométrie projective

Daniel Lehmann



11512

MATHÉMATIQUES POUR LE 2^E CYCLE

Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILBOSSIAN

UNE INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Daniel LEHMANN



24494 1/5



Table des matières

Chapitre premier. De l'étude des projections à la géométrie projective	1
1. Projections cylindriques et rappels de géométrie affine	1
2. Projections coniques	2
3. Adjonction des points à l'infini	6
4. Birapport de quatre points sur une conique	8
5. Quelques divisions harmoniques	15
6. De la géométrie affine à la géométrie projective	17
7. Coordonnées homogènes associées à un repère affine	21
8. Espaces projectifs abstraits	23
9. Appendice	28
10. Exercices du chapitre I	31
Chapitre II. Droites projectives et homographies	35
1. Droite projective prototype $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$	35
2. Structure de droite projective sur un ensemble \mathcal{E}	41
3. Homographies entre droites d'un plan (Théorème de Pappus)	43
4. Homographies d'une conique sur elle même (Théorème de Pascal)	45
5. Génération homographique des coniques	47
6. Classification affine des courbes algébriques du second degré	50
7. Exercices du chapitre II	54
Chapitre III. Sphère de Riemann et groupe circulaire	60
1. Préservation de la "cocyclicité" par homographie	60
2. Préservation des angles orientés	61
3. Ensembles munis d'une structure de droite projective complexe	63
4. Faisceaux de cercles	65
5. Premiers exemples d'applications	69
6. Inversions	71
7. Retour sur la projection stéréographique, et géométrie de la sphère	76
8. Exercices du chapitre III	79

Chapitre IV. Structures additionnelles sur un espace projectif	84
1. Structures affines sur un espace projectif	84
2. Addition de points imaginaires à un espace projectif réel	86
3. Structures angulaires sur un plan projectif réel	88
4. Dualité	94
5. Exercices du chapitre IV	107
Bibliographie	109
Index	111

La collection *Mathématiques 2^e cycle* se propose de mettre à la disposition des étudiants de licence et de maîtrise de mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

La géométrie élémentaire est un cadre idéal pour l'apprentissage du raisonnement mathématique au collège et au lycée et devrait, à ce titre, y jouir d'une situation privilégiée. Les résultats qu'elle permet d'obtenir s'expriment souvent de manière simple, compréhensible par tous : alignement de points, concours de droites,... Mais en même temps, ils sont suffisamment non évidents pour que le profane resente la nécessité d'une démonstration.

Ce manuel, issu d'un cours semestriel enseigné pendant plusieurs années à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc, est une introduction à la géométrie affine et projective.

Nous avons voulu structurer des connaissances déjà acquises (en les rappelant lorsque cela nous a semblé utile), plutôt que parachuter les structures *a priori*. Ainsi par exemple, le premier chapitre montre comment l'étude des projections conduit, de manière naturelle, à la notion d'espace projectif.

Notre exposé met l'accent au moins autant sur les méthodes employées que sur les résultats : le fait de savoir, par exemple, que le théorème de Pappus résulte trivialement de la nature extrêmement simple des homographies d'une droite du plan sur une autre, est aussi important que le résultat lui-même.

Enfin, nous avons voulu présenter et manipuler de « vraies » transformations, qui déforment les figures : projections, inversions, transformations du groupe circulaire ; les isométries et les similitudes, qui préservent trop de choses, sont beaucoup plus difficiles à utiliser ; ce sont pourtant souvent les seules transformations traditionnellement abordées dans l'enseignement secondaire.

