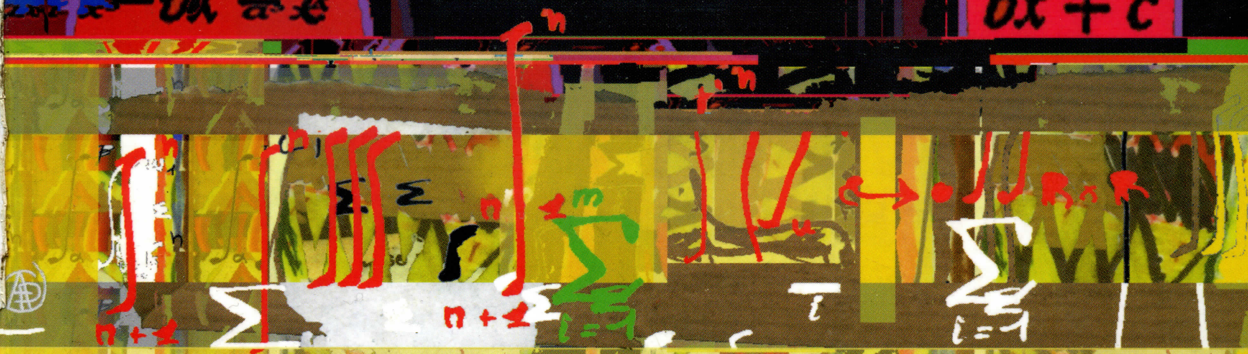
SCIENCES SUP



Cours et problèmes résolus

2[e] cycle • Écoles d'ingénieurs

ÉLÉMENTS DE DISTRIBUTIONS ET D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Claude Zuily

DUNOD

ÉLÉMENTS DE DISTRIBUTIONS ET D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Cours et problèmes résolus

Claude Zuily
Professeur à l'université de Paris XI-Orsay

DUNOD

Table des matières

AVANT-PROPOS VII

CHAPITRE 1 • **ESPACES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES**

1. Les espaces $C^k(\Omega)$ 1
   1.1. *Notations* 1
   1.2. *Formule de Leibniz* 2
   1.3. *Topologie des espaces* $C^k(\Omega)$ 2
   1.4. *Une propriété de* $C^\infty(\Omega)$ 6
2. Les espaces $C_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq +\infty$ 8
   2.1. *Support d'une fonction continue* 8
   2.2. *Les espaces* $C_0^k(\Omega)$ 8
   2.3. *Topologie des espaces* $C_0^k(\Omega)$ 9
   2.4. *Construction de fonctions plateaux* 10
   2.5. *Partition de l'unité* 12
3. Théorèmes de densité 14
   3.1. *Troncature* 14
   3.2. *Régularisation* 15
4. Formule de Taylor avec reste intégral 18

CHAPITRE 2 • **LES DISTRIBUTIONS**

1. Définition des distributions 19
2. Ordre d'une distribution 20
3. Exemples 21
4. Support d'une distribution 24
5. Distributions à support compact 28
6. Un lemme utile 31

CHAPITRE 3 • **OPÉRATIONS SUR LES DISTRIBUTIONS**

1. Multiplication par une fonction C^∞ 35
2. Dérivation des distributions 36
   2.1. *Propriétés et remarques* 36
   2.2. *Exemples* 38

2.3. *Formule des sauts à une variable* 39

2.4. *Formules de Gauss et Green* 41

2.5. *Distributions homogènes* 48

2.6. *Distributions indépendantes d'une variable* 51

2.7. *Solutions élémentaires* 55

CHAPITRE 4 • **CONVERGENCE DES SUITES DE DISTRIBUTIONS**

1. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ 56
2. Le théorème de Banach-Steinhaus 58
3. Application : l'espace $C^k(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ 61
4. Remarques 63

CHAPITRE 5 • **PRODUIT TENSORIEL DES DISTRIBUTIONS**

CHAPITRE 6 • **CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS**

1. Convolution de deux distributions 67
2. Théorèmes de densité 71
3. Support singulier d'une distribution 72
4. Utilisation des solutions élémentaires 73

4.1. *Opérateurs hypoelliptiques* 73

4.2. *Existence de solutions* 75

4.3. *Structure locale des distributions* 76

5. Retour sur les espaces $C^k(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ 77
6. Généralisation 78

CHAPITRE 7 • **IMAGE D'UNE DISTRIBUTION**

1. Cas où f est un difféomorphisme C^∞ de Ω_1 sur Ω_2 81
2. Généralisation au cas où $f'(x)$ est surjective 82

CHAPITRE 8 • **PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LE LAPLACIEN**

1. Les espaces de Sobolev 85

1.1. *Propriétés des espaces de Sobolev* 86

1.2. *Le dual de $H_0^m(\Omega)$* 87

1.3. *L'inégalité de Poincaré* 89

1.4. *Compacité* 90

2. Problème de Dirichlet pour le Laplacien 93

CHAPITRE 9 • **L'ÉQUATION DES ONDES DANS $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3$**

1. Solution élémentaire de $\square$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3$ 95
2. Le problème de Cauchy dans $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ 98
   2.1. *Le problème homogène* 99
   2.2. *Propriétés de la solution* 100
   2.3. *Le problème inhomogène* 103
   2.4. *Unicité de la solution* 105

CHAPITRE 10 • **LA TRANSFORMATION DE FOURIER**

1. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 107
   1.1. *L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$* 107
   1.2. *La transformation de Fourier* 108
2. Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$ 111
3. L'espace $\mathcal{S}'$ et la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ 112
   3.1. *L'espace $\mathcal{S}'$* 112
   3.2. *Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$* 114
   3.3. *Propriétés de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$* 114
4. Transformée de Fourier des distributions à support compact 117
5. Transformation de Fourier dans L^1 et L^2 119
6. Transformation de Fourier et convolution 120
7. Transformation de Fourier partielle et applications 121
   7.1. *Application à la recherche de solutions élémentaires* 122
8. Le théorème de Palais-Wiener-Schwartz 123
   8.1. *Le cas des fonctions* 123
   8.2. *Le cas des distributions* 126
   8.3. *Application* 127
9. La méthode de la phase stationnaire 128

CHAPITRE 11 • **LES ESPACES DE SOBOLEV**

1. Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ 133
   1.1. *Définition* 133
   1.2. *Densité des fonctions régulières* 134
   1.3. *Opérations sur $H^s(\mathbb{R}^n)$* 135
   1.4. *Structure locale des distributions* 136
   1.5. *Dualité* 137
   1.6. *Compacité* 138

1.7. *Traces* 140
2. Les espaces $H^k(\mathbb{R}^n_+)$ 143
2.1. *Densité des fonctions régulières* 143
2.2. *Prolongement à $\mathbb{R}^n$* 144
2.3. *Régularité et compacité* 145
2.4. *Traces* 146
2.5. *Caractérisation de $H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$* 146
3. Les espaces $H^k(\Omega)$ 148
4. Retour sur le problème de Dirichlet pour le Laplacien 149
4.1. *Problème de Dirichlet non homogène* 149
4.2. *Régularité d'ordre supérieur* 149

CHAPITRE 12 • **L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$**
1. Le problème de Cauchy 152
1.1. *Donnée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$* 152
1.2. *Donnée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$* 154
1.3. *Donnée dans $H^s(\mathbb{R}^n)$* 154
1.4. *Forme de la solution* 155
1.5. *Décroissance à l'infini de la solution* 157

CHAPITRE 13 • **THÉORIE SPECTRALE DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LE LAPLACIEN**
1. Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints, compacts 159
1.1. *Spectre* 159
1.2. *Adjoint* 159
1.3. *Opérateurs positifs* 160
1.4. *Opérateurs compacts* 160
2. Application à la théorie spectrale du Laplacien 163
3. Application au problème mixte 165
3.1. *L'équation de la chaleur* 166
3.2. *L'équation des ondes* 170
4. La formule de Weyl 173
4.1. *Étude du noyau de la chaleur* 178
4.2. *Comparaison de p et k* 182

CHAPITRE 14 • **PROBLÈMES**
1. Énoncés 187
2. Solutions 203

BIBLIOGRAPHIE 225
NOTATIONS 227
INDEX 229

SCIENCES SUP

Claude Zuily

ÉLÉMENTS DE DISTRIBUTIONS ET D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Les équations aux dérivées partielles constituent la généralisation naturelle des équations différentielles dans le cas où la fonction inconnue dépend de plusieurs variables. La théorie des distributions établie par Laurent Schwartz leur fournit un cadre bien adapté.

Ce cours est une introduction à ces deux théories. Il est le fruit d'un enseignement de plusieurs années à des étudiants de maîtrise de mathématiques. Cependant, il sera également utile aux élèves des grandes écoles, aux étudiants de troisième cycle ou préparant l'agrégation ainsi qu'à de jeunes chercheurs.

Outre la théorie illustrée par de nombreux exemples, le lecteur trouvera dans cet ouvrage un chapitre composé de quatorze longs problèmes corrigés.

CLAUDE ZUILY

est professeur à l'université Paris XI-Orsay.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

9 782100 057351

ISBN 2 10 005735 9

DUNOD

http://www.dunod.com