

E. Azoulay / J. Avignant

Mathématiques

Rappels de cours et exercices résolus

1. Analyse

IUT
BTS

EdiScience

M501

33557

3



E. Azoulay / J. Avignant

Mathématiques

Rappels de cours et exercices résolus

1. Analyse

IUT
BTS



Table des matières

Avant-propos	V
1. Fonctions d'une variable réelle.	
Limites. Continuité. Dérivation	1
1. Intervalles. Fonction	1
2. Notion de limite	1
3. Extensions de la notion de limite	2
4. Propriétés des limites	2
5. Continuité. Prolongement par continuité	3
6. Propriétés des fonctions continues	4
7. Fonction continue par morceaux	4
8. Fonction paire. Fonction impaire. Fonction périodique	4
9. Fonction composée	4
10. Croissance. Fonction réciproque	5
11. Dérivée et différentielle	5
12. Signification géométrique de la dérivée	6
13. Formules générales relatives aux dérivées	6
14. Dérivée d'une fonction de fonction	7
15. Dérivées des fonctions inverses ou réciproques	7
16. Différentielle	7
17. Dérivée d'ordre n d'un produit de facteurs : formule de Leibniz	8
<i>Exercices</i>	8
<i>Énoncés</i>	8
<i>Solutions</i>	10
<i>Exercices proposés</i>	18
2. Fonctions trigonométriques directes et réciproques	21
Fonctions trigonométriques réciproques	21
<i>Exercices</i>	24
<i>Énoncés</i>	24
<i>Solutions</i>	24
<i>Exercices proposés</i>	30
3. Primitives. Fonctions exponentielles. Fonctions logarithmiques .	33
1. Primitives	33
2. Fonctions exponentielles	34
3. Les logarithmes népériens	37

4. Fonction puissance	38
5. Comparaison de croissance des fonctions $a^x, x^m, \log_a x$	38
<i>Exercices</i>	39
<i>Énoncés</i>	39
<i>Solutions</i>	40
<i>Exercices proposés</i>	50
4. Fonctions hyperboliques directes et réciproques	51
1. Fonctions hyperboliques directes	51
2. Formulaire relatif aux fonctions hyperboliques	53
3. Fonctions hyperboliques inverses ou réciproques	55
<i>Exercices</i>	57
<i>Énoncés</i>	57
<i>Solutions</i>	58
5. Théorème de Rolle. Développements de Taylor et de MacLaurin.	
Développements limités	63
1. Théorème de Rolle	63
2. Formule des accroissements finis	64
3. Formule de Taylor	64
4. Formule de MacLaurin	65
5. Infiniment petits. Infiniment grands	65
6. Formes indéterminées	66
7. Règle de l'Hospital	68
8. Développements limités	68
<i>Exercices</i>	71
<i>Énoncés</i>	71
<i>Solutions</i>	73
<i>Exercices supplémentaires</i>	86
6. Intégrale de Riemann. Calcul d'intégrales	89
1. Intégrale de Riemann	89
2. Valeur moyenne de $f(x)$ sur $[a, b]$	89
3. Propriétés de l'intégrale définie	90
4. Inégalité de Schwarz	90
5. Théorème de la moyenne	90
6. Primitives fondamentales	91
7. Procédés d'intégration	92
8. Calcul numérique approché d'une intégrale définie $\int_a^b f(x) dx = I$	94
<i>Exercices</i>	95

<i>Énoncés</i>	95
<i>Solutions</i>	97
<i>Exercices proposés</i>	106
7. Équations différentielles	111
A. Généralités	111
1. Définition	111
2. Formation de l'équation différentielle d'une famille de courbes ..	111
B. Équations différentielles du premier ordre	112
1. Équations à variables séparées	112
2. Équations homogènes	112
3. Équations linéaires du premier ordre	113
4. Applications des équations du premier ordre	113
C. Équations différentielles du deuxième ordre	114
D. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	115
1. Solution de l'équation sans second membre	115
2. Recherche des solutions particulières de l'équation complète (avec second membre)	115
3. Méthode de la variation des deux constantes	117
<i>Exercices</i>	117
<i>Énoncés</i>	117
<i>Solutions</i>	121
<i>Exercices proposés</i>	147
8. Intégrales généralisées	155
A. Intégrales du type $\int_a^b f(x) dx$, où $f(x) \rightarrow +\infty$ à mesure que $x \rightarrow b_-$	156
1. Étude par comparaison	156
2. Règle de l'ordre	156
3. Règle de Riemann	156
B. Intégrales du type $\int_a^{+\infty} f(x) dx$	156
1. Étude par comparaison	156
2. Règle de l'ordre	157
3. Règle de Riemann	157
4. Cas d'une fonction de signe variable	157
<i>Exercices</i>	157
<i>Énoncés</i>	157

<i>Solutions</i>	159
<i>Exercices proposés</i>	164
9. Fonctions de plusieurs variables réelles	167
1. Définitions	167
2. Fonctions homogènes. Formule d'Euler	172
<i>Exercices</i>	172
<i>Énoncés</i>	172
<i>Solutions</i>	175
<i>Exercices supplémentaires</i>	189
10. Intégrales multiples. Intégrales de surface	191
A. Intégrales doubles	191
1. Définition	191
2. Calcul en coordonnées cartésiennes	192
3. Calcul en coordonnées polaires	193
B. Intégrales triples	194
Calcul en coordonnées cartésiennes	195
C. Changement de variables dans les intégrales multiples	196
D. Aire d'une surface courbe. Intégrale de surface	198
<i>Exercices</i>	200
<i>Énoncés</i>	200
<i>Solutions</i>	203
<i>Exercices proposés</i>	214
11. Opérateurs vectoriels. Intégrales curvilignes.	
Formules intégrales d'analyse vectorielle	217
A. Opérateurs vectoriels	217
1. Champ de scalaires	217
2. Gradient d'une fonction de plusieurs variables	217
3. Champ de vecteurs	218
4. Divergence d'un vecteur	218
5. Travail élémentaire d'un vecteur \vec{V} dans un déplacement $d\vec{M}$...	218
6. Rotationnel d'un vecteur	218
7. Laplacien d'une fonction de trois variables	219
8. Vecteur « nabla »	219
9. Relations liant les différents opérateurs	219
B. Intégrales curvilignes	219
1. Définition	219
2. Interprétation géométrique	220

3. Notion de facteur intégrant	221
C. Formules intégrales d'analyse vectorielle	221
1. Formule de Riemann	221
2. Formule de Stokes	222
3. Formule d'Ostrogradski	223
<i>Exercices</i>	224
<i>Énoncés</i>	224
<i>Solutions</i>	226
<i>Exercices supplémentaires</i>	237
12. Applications du calcul intégral	239
A. Calculs à partir d'une intégrale simple	239
1. Calcul d'aires	239
2. Longueur d'un arc de courbe	240
3. Calcul de volumes	241
4. Calcul de volumes de révolution	242
5. Calcul d'une aire de révolution	243
6. Centre de gravité d'un arc de courbe	243
7. Théorèmes de Guldin	243
B. Calculs à partir d'intégrales multiples	244
1. Calcul de l'aire d'une surface plane délimitée par une courbe fermée grâce à une intégrale double	244
2. Volume V intérieur à un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$	244
3. Calcul de l'aire d'une surface quelconque rencontrée au plus en un point par toute parallèle à Oz et d'équation $z = f(x, y)$..	244
4. Masse et centre de gravité des domaines plans	245
5. Calcul d'un volume par une intégrale double	245
6. Calcul du centre de gravité d'un domaine $V \subset \mathbb{R}^3$	246
7. Moment d'inertie par rapport à un point, une droite ou un plan	246
<i>Exercices</i>	247
<i>Énoncés</i>	247
<i>Solutions</i>	251
<i>Exercices supplémentaires</i>	263
13. Suites numériques et applications	265
1. Définitions	265
2. Limite d'une suite	265
3. Suite arithmétique	265
4. Suite géométrique	266

5. Suites de Cauchy	266
6. Théorème fondamental de convergence	266
7. Suites adjacentes	266
8. Suites récurrentes	266
9. Résolution de $f(x) = 0$	267
<i>Exercices</i>	269
<i>Énoncés</i>	269
<i>Solutions</i>	271
<i>Exercices supplémentaires</i>	277
14. Séries numériques	281
A. Généralités	281
1. Convergence	281
2. Condition nécessaire de convergence	281
3. Série géométrique	282
B. Séries à termes positifs	282
1. Convergence	282
2. Propriétés d'associativité et de commutativité	282
3. Théorèmes de comparaison de deux séries positives	282
C. Règles à utiliser pour l'étude et la convergence des séries à termes positifs	283
1. Règle de Cauchy	283
2. Règle de D'Alembert	283
3. Comparaison avec une intégrale	284
4. Règle de comparaison à une série de Riemann (ou règle « $n^\alpha U_n$ »)	284
D. Séries à termes de signe quelconque	285
1. Convergence absolue. Semi-convergence	285
2. Cas particulier des séries alternées	285
3. Propriétés des séries absolument convergentes	285
<i>Exercices</i>	285
<i>Énoncés</i>	285
<i>Solutions</i>	287
<i>Exercices supplémentaires</i>	297
15. Suites et séries de fonctions. Séries entières.	
Développements en série	299
A. Suites de fonctions	299
1. Convergence uniforme	299

2. Propriétés des suites de fonctions	299
B. Séries de fonctions	300
1. Convergence	300
2. Propriétés dans le cas de la convergence uniforme	301
3. Convergence normale	301
C. Séries entières	302
1. Définition	302
2. Propriétés fondamentales	302
3. Résolutions d'équations différentielles à l'aide de séries entières	303
D. Développement en série entière d'une fonction f	303
1. Principe	303
2. Développements en série usuels	304
<i>Exercices</i>	305
<i>Énoncés</i>	305
<i>Solutions</i>	307
<i>Exercices supplémentaires</i>	316
16. Séries de Fourier	319
1. Définition	319
2. Développement en série de Fourier d'une fonction périodique ..	319
3. Forme complexe d'une série de Fourier	320
4. Formule de Parseval	321
<i>Exercices</i>	321
<i>Énoncés</i>	321
<i>Solutions</i>	322
<i>Exercices supplémentaires</i>	335
17. Transformation de Laplace	339
A. Transformée de Laplace	339
1. Définition	339
2. Notations	339
3. Conditions d'existence de la transformée de Laplace	339
4. Propriété de la transformée de Laplace	340
5. Transformées de Laplace des fonctions usuelles	341
6. Transformée de $f(at)$ avec $a > 0$	341
7. Transformée de $f(t - a)$ ou « formule du retard »	341
8. Transformée d'une fonction périodique	341
9. Transformée de la dérivée	341

10. Généralisation	341
B. Transformée inverse de Laplace	342
1. Définition	342
2. Original de $F(ap)$	342
3. Original de $F(p+a)$	342
4. Original de $F'(p)$	342
5. Original de $\int_p^\infty F(u) du$	342
C. Formules « eaux limites »	342
<i>Exercices</i>	343
<i>Énoncés</i>	343
<i>Solutions</i>	345
<i>Exercices supplémentaires</i>	353
Index	355

Ce livre est destiné aux étudiants préparant un D.U.T. ou un B.T.S. et aux techniciens participant aux différents cycles de formation continue.

Soucieux d'en faire un livre d'usage pratique, les auteurs ont veillé à proposer sur chacun des thèmes :

- d'une part, des rappels de cours aussi complets que cela est nécessaire,
- d'autre part, un grand nombre d'exercices (449 dans le présent volume) pour la plupart complètement résolus, favorisant largement l'assimilation du cours et permettant de plus une vérification des connaissances.



9 782100 069675

ISBN 2 10 006967 5

