

N. PISKOUNOV

# Calcul Différentiel et Intégral

**TOME 1**

1<sup>ère</sup> Partie



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

M49/T1/PA

N. PISKOUNOV



062513

062513

①

**CALCUL**

**DIFFÉRENTIEL**

et

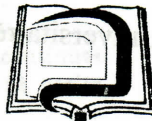
**INTÉGRAL**



tome I

**1ère Partie**

**5<sup>ème</sup> ÉDITION**



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

## TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos à la cinquième édition . . . . .	11
---	----

### CHAPITRE I

#### NOMBRE, VARIABLE, FONCTIONS

§	1. Nombres réels. Représentation des nombres réels par les points de l'axe numérique . . . . .	13
§	2. Valeur absolue d'un nombre réel . . . . .	15
§	3. Grandeurs variables et grandeurs constantes . . . . .	16
§	4. Domaine de définition d'une variable . . . . .	17
§	5. Variable ordonnée. Variable croissante et variable décroissante. Variable bornée . . . . .	19
§	6. Fonction . . . . .	20
§	7. Diverses formes d'expression des fonctions . . . . .	21
§	8. Principales fonctions élémentaires. Fonctions élémentaires . . . . .	23
§	9. Fonctions algébriques . . . . .	28
§	10. Système de coordonnées polaires . . . . .	30
	<i>Exercices</i> . . . . .	32

### CHAPITRE II

#### LIMITE ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS

§	1. Limite d'une grandeur variable. Grandeur variable infiniment grande . . . . .	34
§	2. Limite d'une fonction . . . . .	37
§	3. Fonctions qui tendent vers l'infini. Fonctions bornées . . . . .	40
§	4. Infinitement petits et leurs propriétés fondamentales . . . . .	44
§	5. Théorèmes fondamentaux sur les limites . . . . .	47
§	6. Limite de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ quand $x \rightarrow 0$ . . . . .	51
§	7. Le nombre $e$ . . . . .	53
§	8. Logarithmes népériens . . . . .	58
§	9. Continuité des fonctions . . . . .	59
§	10. Propriétés des fonctions continues . . . . .	64
§	11. Comparaison des infinitésimales . . . . .	66
	<i>Exercices</i> . . . . .	69

## CHAPITRE III

## DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE

§ 1. Vitesse d'un mouvement . . . . .	72
§ 2. Définition de la dérivée . . . . .	74
§ 3. Interprétation géométrique de la dérivée . . . . .	76
§ 4. Fonctions dérivables . . . . .	77
§ 5. Dérivée de la fonction $y = x^n$ pour $n$ entier et positif . . . . .	79
§ 6. Dérivées des fonctions $y = \sin x$ ; $y = \cos x$ . . . . .	81
§ 7. Dérivées d'une constante, du produit d'une constante par une fonction, d'une somme, d'un produit et du rapport de deux fonctions . . . . .	83
§ 8. Dérivée d'une fonction logarithmique . . . . .	88
§ 9. Dérivée d'une fonction composée . . . . .	89
§ 10. Dérivées des fonctions $y = \operatorname{tg} x$ , $y = \operatorname{ctg} x$ , $y = \operatorname{Log}  x $ . . . . .	91
§ 11. Fonction implicite et sa dérivée . . . . .	93
§ 12. Dérivée d'une fonction puissance quand l'exposant est un nombre réel quelconque, dérivée de la fonction exponentielle et de la fonction composée exponentielle . . . . .	95
§ 13. Fonction inverse (ou réciproque) et sa dérivée . . . . .	98
§ 14. Fonctions trigonométriques inverses et leurs dérivées . . . . .	102
§ 15. Tableau des principales formules de dérivation . . . . .	106
§ 16. Fonctions données sous forme paramétrique . . . . .	108
§ 17. Equations paramétriques de certaines courbes . . . . .	109
§ 18. Dérivée d'une fonction donnée sous forme paramétrique . . . . .	112
§ 19. Fonctions hyperboliques . . . . .	114
§ 20. Différentielle . . . . .	117
§ 21. Interprétation géométrique de la différentielle . . . . .	121
§ 22. Dérivées de différents ordres . . . . .	122
§ 23. Différentielles de différents ordres . . . . .	125
§ 24. Dérivées de différents ordres des fonctions implicites et des fonctions données sous forme paramétrique . . . . .	126
§ 25. Interprétation mécanique de la dérivée seconde . . . . .	129
§ 26. Equations de la tangente et de la normale. Longueurs de la sous-tangente et de la sous-normale . . . . .	130
§ 27. Interprétation géométrique de la dérivée du rayon vecteur par rapport à l'angle polaire . . . . .	133
<i>Exercices</i> . . . . .	135

## CHAPITRE IV

## THÉORÈMES RELATIFS AUX FONCTIONS DÉRIVABLES

§ 1. Théorème relatif aux racines de la dérivée (théorème de Rolle) . . . . .	147
§ 2. Théorème des accroissements finis (théorème de Lagrange) . . . . .	149
§ 3. Théorème de Cauchy (rapport des accroissements de deux fonctions) . . . . .	150

§ 4. Limite du rapport de deux infiniment petits (vraie valeur des indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$ ) . . . . .	151
§ 5. Limite du rapport de deux infiniment grands (vraie valeur des indéterminations de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ) . . . . .	155
§ 6. Formule de Taylor . . . . .	160
§ 7. Développement des fonctions $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ par la formule de Taylor . . . . .	164
<i>Exercices</i> . . . . .	168

CHAPITRE V

ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS

§ 1. Position du problème . . . . .	171
§ 2. Croissance et décroissance des fonctions . . . . .	172
§ 3. Maximum et minimum des fonctions . . . . .	174
§ 4. Marche à suivre pour l'étude du maximum et du minimum d'une fonction dérivable à l'aide de la dérivée première . . . . .	181
§ 5. Etude du maximum et du minimum des fonctions à l'aide de la dérivée seconde . . . . .	183
§ 6. Plus grande et plus petite valeur d'une fonction sur un segment . . . . .	187
§ 7. Application de la théorie du maximum et du minimum des fonctions à la résolution de problèmes . . . . .	188
§ 8. Etude des maximums et des minimums d'une fonction à l'aide de la formule de Taylor . . . . .	190
§ 9. Convexité et concavité des courbes. Points d'inflexion . . . . .	192
§ 10. Asymptotes . . . . .	199
§ 11. Schéma général de l'étude des fonctions et de la construction des graphiques . . . . .	203
§ 12. Etude des courbes données sous forme paramétrique . . . . .	207
<i>Exercices</i> . . . . .	212

CHAPITRE VI

COURBURE D'UNE COURBE

§ 1. Longueur de l'arc et sa dérivée . . . . .	219
§ 2. Courbure . . . . .	221
§ 3. Calcul de la courbure . . . . .	223
§ 4. Calcul de la courbure des courbes sous forme paramétrique . . . . .	226
§ 5. Calcul de la courbure des courbes en coordonnées polaires . . . . .	227
§ 6. Rayon et cercle de courbure. Centre de courbure. Développée et développante . . . . .	228
§ 7. Propriétés de la développée . . . . .	234
§ 8. Calcul approché des racines réelles d'une équation . . . . .	237
<i>Exercices</i> . . . . .	242

## CHAPITRE VII

## NOMBRES COMPLEXES, POLYNÔMES

§ 1. Nombres complexes. Définitions . . . . .	245
§ 2. Principales opérations sur les nombres complexes . . . . .	247
§ 3. Elévation d'un nombre complexe à une puissance et extraction de la racine d'un nombre complexe . . . . .	250
§ 4. Fonction exponentielle à exposant complexe et ses propriétés . . . . .	253
§ 5. Formule d'Euler. Forme exponentielle d'un nombre complexe . . . . .	256
§ 6. Décomposition d'un polynôme en facteurs . . . . .	258
§ 7. Racines multiples du polynôme . . . . .	261
§ 8. Décomposition en facteurs d'un polynôme dans le cas des racines complexes . . . . .	263
§ 9. Interpolation. Formule d'interpolation de Lagrange . . . . .	264
§ 10. Formule d'interpolation de Newton . . . . .	266
§ 11. Dérivation numérique . . . . .	268
§ 12. Meilleure approximation d'une fonction par des polynômes. Théorie de Tchébychev . . . . .	269
<i>Exercices</i> . . . . .	271

## CHAPITRE VIII

## FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

§ 1. Définition des fonctions de plusieurs variables . . . . .	273
§ 2. Représentation géométrique d'une fonction de deux variables . . . . .	276
§ 3. Accroissement partiel et accroissement total de la fonction . . . . .	277
§ 4. Continuité des fonctions de plusieurs variables . . . . .	279
§ 5. Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables . . . . .	282
§ 6. Interprétation géométrique des dérivées partielles d'une fonction de deux variables . . . . .	284
§ 7. Accroissement total et différentielle totale . . . . .	285
§ 8. Emploi de la différentielle totale pour les calculs approchés . . . . .	288
§ 9. Emploi de la différentielle pour évaluer l'erreur commise pendant les calculs numériques . . . . .	289
§ 10. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée totale. Différentielle totale d'une fonction composée . . . . .	293
§ 11. Dérivation des fonctions implicites . . . . .	297
§ 12. Dérivées partielles de différents ordres . . . . .	300
§ 13. Surfaces de niveau . . . . .	305
§ 14. Dérivée suivant une direction donnée . . . . .	306
§ 15. Gradient . . . . .	308
§ 16. Formule de Taylor pour une fonction de deux variables . . . . .	312
§ 17. Maximum et minimum d'une fonction de plusieurs variables . . . . .	314
§ 18. Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables soumises à certaines conditions (maximums et minimums liés) . . . . .	323

§ 19. Dépendance fonctionnelle obtenue en traitant les données expérimentales par la méthode des moindres carrés . . . . .	328
§ 20. Points singuliers d'une courbe . . . . .	332
<i>Exercices</i> . . . . .	338

## CHAPITRE IX

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL À LA  
GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

§ 1. Equation d'une courbe dans l'espace . . . . .	342
§ 2. Limite et dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable scalaire indépendante. Equation de la tangente à une courbe. Equation du plan normal . . . . .	345
§ 3. Règles de dérivation des vecteurs (fonctions vectorielles) . . . . .	351
§ 4. Dérivées première et seconde d'un vecteur par rapport à la longueur de l'arc. Courbure de la courbe. Normale principale. Vitesse et accélération du point dans un mouvement curviligne . . . . .	354
§ 5. Plan osculateur. Binormale. Torsion d'une courbe gauche . . . . .	363
§ 6. Plan tangent et normale à une surface . . . . .	368
<i>Exercices</i> . . . . .	372

## CHAPITRE X

## INTÉGRALE INDÉFINIE

§ 1. Primitive et intégrale indéfinie . . . . .	375
§ 2. Table d'intégrales . . . . .	378
§ 3. Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie . . . . .	380
§ 4. Intégration par changement de variable . . . . .	382
§ 5. Intégration de certaines expressions contenant le trinôme $ax^2 + bx + c$ . . . . .	384
§ 6. Intégration par parties . . . . .	387
§ 7. Fractions rationnelles. Fractions rationnelles élémentaires et leur intégration . . . . .	390
§ 8. Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples . . . . .	395
§ 9. Intégration des fractions rationnelles . . . . .	399
§ 10. Intégration des fonctions irrationnelles . . . . .	402
§ 11. Intégrales du type $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . . . . .	404
§ 12. Intégration de certaines classes de fonctions trigonométriques . . . . .	407
§ 13. Intégration de certaines fonctions irrationnelles à l'aide de transformations trigonométriques . . . . .	412
§ 14. Fonctions dont les intégrales ne peuvent être exprimées par des fonctions élémentaires . . . . .	414
<i>Exercices</i> . . . . .	416

## CHAPITRE XI

## INTÉGRALE DÉFINIE

§	1. Position du problème. Sommes intégrales inférieure et supérieure	427
§	2. Intégrale définie. Théorème d'existence de l'intégrale définie . . .	429
§	3. Propriétés fondamentales de l'intégrale définie . . . . .	439
§	4. Calcul de l'intégrale définie. Formule de Newton-Leibniz . . . . .	443
§	5. Changement de variable dans une intégrale définie . . . . .	447
§	6. Intégration par parties . . . . .	449
§	7. Intégrales impropres . . . . .	451
§	8. Calcul approché des intégrales définies . . . . .	458
§	9. Formule de Tchébychev . . . . .	464
§	10. Intégrales dépendant d'un paramètre. Fonction gamma . . . . .	469
§	11. Intégration d'une fonction complexe de la variable réelle . . . . .	473
	<i>Exercices</i> . . . . .	473

## CHAPITRE XII

## APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

§	1. Calcul des aires en coordonnées rectangulaires . . . . .	478
§	2. Aire d'un secteur curviligne en coordonnées polaires . . . . .	481
§	3. Longueur d'un arc de courbe . . . . .	482
§	4. Calcul du volume d'un corps en fonction des aires des sections parallèles . . . . .	488
§	5. Volume d'un corps de révolution . . . . .	490
§	6. Aire d'un corps de révolution . . . . .	491
§	7. Calcul du travail au moyen de l'intégrale définie . . . . .	492
§	8. Coordonnées du centre de gravité . . . . .	494
§	9. Calcul du moment d'inertie d'une courbe, d'un cercle et d'un cy- lindre à l'aide de l'intégrale définie . . . . .	497
	<i>Exercices</i> . . . . .	500
	Index . . . . .	506