

23905/2

Pierre DOUILLET

MATHS AVEC MAPLE

Tome 2

ellipses

MATHS a v e c MAPLE

~~XXXXXX~~
1749872



Tome 2

Consacré notamment aux polynômes orthogonaux

Pierre DOUILLET
Professeur de Mathématiques
et d'Informatique (Maths Sup)
au lycée Janson de Sailly

23905 $\frac{2}{4}$



Table des matières

Chapitre I. Maple V4, un survol	9
1. Fenêtres Maple	9
Identifier les objets (9). Sauvegarder son travail (10). Arrêt d'urgence (10). Multi-fenêtrage (10). Hot-keys (10)	
2. Feuilles de calcul	11
Conventions typographiques en usage dans ce livre (11). Grouper, dégrouper (11)	
3. Documentation Maple	12
La caverne aux trésors (12). Problèmes rencontrés (13). Trouver de l'aide (13)	
4. Deux utilitaires	14
A propos des arbres syntaxiques (14). Visualiser les arborescences (15). Reconnaissance de motifs (16). Petit artifice de mise en page (17). Typage, un résumé (18)	
5. Les beaux dessins	19
Principes de fonctionnement (19). Bitmaps et impression. (19). A propos des temps d'impression (20). Oser le PostScript (21). A propos du positionnement (21). A propos des bordures (21)	
6. Fonction génératrice des polynômes de Gegenbauer	23
Un problème de représentation (23). Création de coupures (25). Séparer les nappes (26)	
Chapitre II. Exercices de révision (Concours général 1996)	27
1. Geometry version 4, un naufrage	27
Geometry, un package particulier (27). Typage des objets géométriques (28). La commande xprint (29). Les naufrageurs (29). Un kit de survie (29)	
2. Excroissances carrées sur un triangle	30
Exercice 1996-1 (30). Tracé de la figure (30). Démonstration du résultat annoncé (32)	
3. Période et orbites	34
Exercice 1996-2 (34). Une suite extraite (34). Vérification du résultat (34). L'algorithme de Pollard (35). Classes de transitivité : une conjecture (36)	
4. Tétraèdres quadri-rectangles	37
Exercice 1996-3 (37). L'hypoténuse est le plus grand côté (37). Le cas deux fois isocèle (38). Tracé des deux figures (39)	
5. Etude d'une fonction de deux variables	40
Exercice 1996-4 (40). Quelques désagréments (40). Tracé de la figure (40). Première question (42). Un empilement de fonctions auxiliaires (43). Exercices (44)	
6. Un problème de dénombrement	44
Exercice 1996-5 (44). Une condition nécessaire (45). Une condition suffisante (45)	
Chapitre III. Quelques rappels d'algèbre linéaire et quadratique	47
1. Algèbre linéaire	47
Rappel de quelques définitions (47). Parties libres, parties génératrices (48). Bases d'un espace vectoriel, dimension, déterminant (48)	

2. L'exemple des polynômes	49
Rappel de définitions (49). Liste des coefficients d'un polynôme (49). Matrice d'une application linéaire (50). Polynômes de Lagrange (52)	
3. Listes chaînées, listes contiguës	53
Deux implémentations différentes (53). Deux fonctionnements différents (53). Un utilitaire de présentation (54)	
4. Vecteurs et Maple V4	55
Typage des vecteurs et des matrices (55). Isomorphes et donc différents (56). Vecteurs et produits matriciels (57)	
5. Produit scalaire sur un espace vectoriel réel	58
Rappel de définitions (58). (58). Démonstration de l'inégalité triangulaire (61)	
6. Réduction des formes quadratiques	62
Endomorphismes et changements de base (62). Formes bilinéaires et changements de base (62). Orthogonalisation de Schmidt (63). Visualisation de l'orthogonalisation de Schmidt (63). Diagonalisation d'une matrice symétrique (65). Matrice symétrique définie positive (66)	
7. Les deux piliers de la sagesse	67
Premier pilier : les coefficients de Fourier (67). Deuxième pilier : le théorème de Pythagore-Parseval-Bessel (68). Un exemple en dimension 3 (69)	
Chapitre IV. Polynômes de Legendre (approche expérimentale)	71
1. Présentation	71
Un produit scalaire (71). Digression : déterminants de Van der Monde (72). Orthogonalisation de Schmidt (73). Changement de variable (75)	
2. Quelques propriétés algébriques	76
Formule de Rodriguès (76). Deux relations (78). Graphes (79). Intégrales de Wallis (80). Relation de récurrence entre les polynômes (81)	
3. Quelques propriétés analytiques	81
Equation différentielle (81). Fonction génératrice (84). Utilisation de la fonction génératrice (85)	
Chapitre V. Formalisme de Rodriguès	87
1. La bibliothèque Xdiff	87
Dérivation avec Maple (87). Pour une meilleure gestion des dérivées d'ordre variable (89). Comment enrichir les procédures génériques (90)	
2. La formule de Rodriguès	92
Poids et produit scalaire dans $R[X]$ (92). Objectifs (92). Description de la méthode (93). Description des cas usuels (94). Hypothèses préalables (95)	
3. Polynômes de Douillet	97
Définition (97). Coefficient dominant (98). Valeur en $x=1$ (99). Norme, et intégrales de Wallis (100). Simplification récursive des intégrales (101)	
4. Formules de récurrence	103
Utilisation d'un moteur d'inférence (103). Récurrence différentielle (103). Relation entre trois polynômes orthogonaux consécutifs (104). Relation de récurrence, cas général (105). Famille d'équations différentielles (106). Relation de récurrence entre les coefficients d'un même polynôme (107)	
5. Construction d'un moteur d'inférences	108
Edition des règles (108). Utilisation des règles (109). Visualisation des règles (110)	
6. Passage aux séries génératrices	111
Le problème à résoudre (111). Méthode de codage (112). Création d'un moteur d'inférence (112)	
7. Utilisation des séries génératrices	114
Calcul de la série génératrice (114). Valeur en $x=1$, en $x=0$ (116). Norme (116). Coefficient dominant (117). Exercices (118)	

Chapitre VI. Les familles usuelles de polynômes orthogonaux	119
1. Polynômes de Legendre	120
Particularisation des calculs (120). A propos des équations différentielles (122). Le changement de variable miraculeux (123). Stabilité de la récurrence à x constant (124). Enumération des carrés scalaires (125)	
2. Polynômes de Laguerre	126
Particularisation des calculs (126). Coefficient dominant (127). Intégrales de Wallis (128). Equations de liaison (128). Récurrence entre coefficients d'un même polynôme (129). Détermination de la fonction génératrice (129). Autres résultats (130)	
3. Polynômes de Hermite	132
Particularisation des calculs (132). L'intégrale de Gauss (134). Equations de liaison (134). Détermination de la fonction génératrice (135). Coefficients et récurrence (135). Récurrence à abscisse constante. (136). À nouveau, à propos du choix de la normalisation (137)	
4. Polynômes de Chebyshev	138
Particularisation des calculs (138). Difficulté du calcul direct (140). Relations de liaison (140). Fonction génératrice (141). Calcul du carré scalaire (142). Récurrence à abscisse constante (145)	
5. Polynômes de Gegenbauer	146
Particularisation des calculs (146). Relations de liaison (148). Fonction génératrice (148). Fonction génératrice du carré scalaire (150)	
6. Polynômes de Douillet	152
Chapitre VII. Propriétés analytiques des polynômes orthogonaux	153
1. A propos des changements de variables	153
Méthode et automatisation (153). Fonction réciproque (154). Arcs paramétrés et rayon de courbure (155). Equations différentielles (155). Limitations du logiciel (156)	
2. Spécificité des polynômes de Chebyshev	156
Equation différentielle générale (156). Relations de liaison entre les solutions polynomiales (157). Une transformation (159). Famille des dérivées (159)	
3. Etude de la solution de Lagrange	162
Cas général (162). Polynômes de Gegenbauer (163). Polynôme de Legendre (164). Polynômes de Douillet (165)	
4. Recherche d'un changement de variable	166
Cas général (166). Polynômes de Chebyshev (167). Polynômes de Gegenbauer (167). Polynômes de Legendre (169)	
5. Formules asymptotiques	170
Cas général (170). Polynômes de Chebyshev (172). Polynômes de Gegenbauer (174). Polynômes de Legendre (176). Polynômes de Douillet (179)	
6. Résultats asymptotiques pour les polynômes de Hermite	180
Formule asymptotique (180). Quelques graphiques (181). Approximation des racines (184)	
Chapitre VIII. Un peu de trigonométrie	185
1. Formule de Moivre	185
Tracé d'une figure (185). Théorème de l'angle au centre (186). La fonction exponentielle (187). Propriétés de l'exponentielle (189). Le nombre Pi (189). Les fonctions réciproques (191)	
2. Retour aux polynômes de Chebyshev	192
Formules élémentaires (192). Fonctions génératrices (194). Conséquences du changement de variable (195). Relation entre les fonctions génératrices (197)	
3. Noyaux de Dirichlet et de Fejer	198
Produit de Cauchy de deux séries (198). Ruse sommatoire de base (199). Noyau de Dirichlet (199). Noyau de Fejer (201)	

Chapitre IX. Quelques compléments	203
1. A propos de l'intégrale de Gauss	203
En suivant Valiron (203). Passage en polaires (205). En utilisant Fubini (206)	
2. Formule de Stirling	207
La fonction Gamma (207). Approche expérimentale (209). En suivant Valiron (209)	
3. Loi binômiale et loi normale	211
Loi binômiale (211). Loi réduite (212). Passage à la limite (213). Facteur de normalisation (214). Vérification graphique (215). Vérification par les intégrales de Wallis (216)	
4. Equation hyper-géométrique de Gauss	217
Point singulier régulier (217). Equation déterminante (218). Automatisation du calcul (219). Equations de Fusch (220). L'équation de Gauss (221). La série hyper-géométrique (223)	
5. Application aux polynômes de Chebyshev et de Gegenbauer	225
Translation du troisième pôle (225). Polynômes de Chebyshev (227). Polynômes de Gegenbauer (228). Comportement à l'infini (229). Utilisation de la parité (231)	
6. Application aux polynômes de Legendre	233
Le cas logarithmique (233). Méthode de Lagrange (234). Harmoniques sphériques (235). Page paire en fin de chapitre (235)	
 Bibliographie	 237
 Index	 238

Les exercices sont incorporés dans le corps de l'ouvrage. On les trouvera aux pages :

10, 13, 26, 35, 36, 37, 42, 44, 46, 48, 51, 52, 54, 58, 61, 63, 66, 69, 70, 79, 85, 86, 97, 104, 109, 110, 118, 124, 134, 135, 137, 151, 154, 155, 159, 161, 165, 166, 176, 178, 179, 183, 184, 189, 191, 192, 199, 201, 202, 221, 224, 225, 228, 229, 231, 232, 235

où ils sont signalés par le signe ✓.

Cette
collection "Maths avec Maple" est
destinée à améliorer la **productivité** du lecteur
dans le domaine des mathématiques, tout en accumulant
une expérience suffisamment large dans le domaine informatique
pour pouvoir en **abstraire** les théories nécessaires.

Le **tome 1** de la collection, consacré à une présentation générale du calcul formel, a été organisé autour d'une tentative de corrigé des exercices du Concours Général 1990-1995. Pour ce **tome 2**, l'auteur a voulu disposer à nouveau d'un fil conducteur permettant d'explorer des domaines variés des mathématiques, tout en restant accessible à un large public scientifique.

Le thème fédérateur du présent livre est l'étude des **familles de polynômes orthogonaux**. Les résultats classiques concernant ces polynômes sont exposés et mis en relation les uns avec les autres, permettant de fructueux allers et retours entre l'Algèbre et l'Analyse.

Chaque calcul est examiné dans ses détails techniques, tout en mettant en évidence les questions sous-jacentes d'informatique théorique. En outre, les mécanismes mis en œuvre par les outils de calcul formel sont illustrés par la construction détaillée d'une bibliothèque complémentaire, étendant les fonctionnalités du logiciel.

Un livre et une série qui intéresseront tous ceux qui font professionnellement des mathématiques, et en particulier les élèves de Prépa :

L'une des applications des polynômes orthogonaux n'est-elle pas de peupler les sujets des Concours ?



ISBN 2-7298-5631-5