

D.E. MEDJADI
Professeur E.N.S

M. BOUKRA
Maitre-Assistant E.N.S

A. DJADANE
Chargé de cours E.N.S

B.K. SADALLAH
Chargé de cours E.N.S

ANALYSE MATHÉMATIQUE

1ère année d'Université

Fonctions de plusieurs variables réelles

Volume 2

OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

D.E. MEDJADI
Professeur E.N.S

M. BOUKRA
Maître-Assistant E.N.S

A. DJADANE
Chargé de cours E.N.S

B.K. SADALLAH
Chargé de cours E.N.S

ANALYSE MATHÉMATIQUE

1ère année d'Université

Fonctions de plusieurs variables réelles

Volume 2

OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

11488 N₂

D.E. MEDJADI
Professeur E.N.S

M. BOUKRA
Maître-Assistant E.N.S

A. DJADANE
Chargé de cours E.N.S

B.K. SADALLAH
Chargé de cours E.N.S

23338

$\frac{5}{10}$

ANALYSE MATHÉMATIQUE

1ère année d'Université

Volume 2



Fonctions de plusieurs variables réelles

REIMPRESSION 2001



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

1, Place centrale de Ben-Aknoun (Alger)

Volume (1)

Avant-propos

i

Chapitre 0 : Rappels d'algèbre

1

0.1 - Applications

1

0.2 - Propriétés des applications

2

0.3 - Factorisation d'une application

5

0.4 - Lois de composition

6

 0.5 - Qualités et propriétés des lois de composition
interne

7

0.6 - Groupes

12

0.7 - Anneaux

15

0.8 - Corps

17

0.9 - Espaces vectoriels

18

0.10- Relation d'ordre

20

0.11- Cardinaux

24

0.12- Exercices

25

Chapitre 1 : Construction algébrique de \mathbf{R}

27

1.1 - Introduction

27

1.2 - Sections

28

1.3 - Ensemble des nombres réels

36

Chapitre 2 : Propriétés topologiques de \mathbf{R}

39

 2.1 - Ensembles ouverts dans \mathbf{R}

39

2.2 - Voisinages d'un point

41

2.3 - Points adhérents à un ensemble

42

 2.4 - Ensembles fermés dans \mathbf{R}

43

2.5 - Ensembles bornés

46

2.6 - Exercices

47

Chapitre 3 : Suites numériques

51

3.1 - Généralités

52

3.2 - Nature d'une suite réelle

54

3.3 - Règles de calcul

59

3.4 - Convergence des suites monotones

65

3.5 - Suites adjacentes

68

3.6 - Suites extraites

71

3.7 - Théorème de Bolzano-Weierstrass

74

3.8 - Suites de Cauchy	79
3.9 - Suites complexes	82
3.10- Exercices	84
<u>Chapitre 4 : Fonctions réelles d'une variable réelle</u>	93
4.1 - Généralités	93
4.2 - Propriétés éventuelles d'une fonction	95
4.3 - Limite d'une fonction	99
4.4 - Notion de continuité	108
4.5 - Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues	116
4.6 - Suites de fonctions	125
<u>Chapitre 5 : Dérivation</u>	129
5.1 - Dérivée d'une fonction réelle d'une variable réelle en un point	129
5.2 - Différentiabilité en un point	131
5.3 - Propriétés de la dérivation	132
5.4 - Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	139
5.5 - Formule de Taylor-Lagrange	147
5.6 - Fonctions convexes	150
5.7 - Exercices	154
<u>Chapitre 6 : Fonctions élémentaires</u>	159
6.1 - Fonction logarithme népérien	160
6.2 - Logarithme de base quelconque	167
6.3 - Fonction exponentielle de base e	168
6.4 - Fonction exponentielle de base quelconque	171
6.5 - Fonction puissance	173
6.6 - Fonctions circulaires réciproques	176
6.7 - Fonctions hyperboliques	179
6.8 - Fonctions hyperboliques réciproques	182
6.9 - Exercices	185
<u>Chapitre 7 : Les développements limités</u>	193
7.1 - Infiniment petits , infiniment grands	194
7.2 - Relations de comparaison - Notations o et O de Landau	195
7.3 - Propriétés générales des symboles o et O	196
7.4 - Fonctions équivalentes au voisinage d'un point	199
7.5 - Ordre d'un infiniment petit	202
7.6 - Développements limités au voisinage de 0	205

7.7 - Une méthode de recherche d'un développement limité	211
7.8 - Une propriété éventuelle du développement limité	212
7.9 - Développements limités usuels	213
7.10- Calculs sur les développements limités	217
7.11- Technique n'utilisant pas la division des polynômes	225
7.12- Technique utilisant la division des polynômes	226
7.13- Dérivation et intégration des développements limités	230
7.14- Développements limités usuels au voisinage de zéro	234
7.15- Développements limités généralisés	235
7.16- Développements asymptotiques à l'infini	237
7.17- Applications des développements limités	238
7.18- Exercices	242

Chapitre 8 : L'intégrale de Riemann

249

8.1 - Définition des fonctions en escalier	250
8.2 - Propriétés des fonctions en escalier	251
8.3 - Intégrale des fonctions en escalier	253
8.4 - Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier	255
8.5 - Fonctions intégrables au sens de Riemann	258
8.6 - Classe des fonctions intégrables	261
8.7 - Propriétés des fonctions intégrables	266
8.8 - Produit de fonctions intégrables, Théorème de la moyenne, Inégalités de Schwarz et de Minkowski	274
8.9 - Autre critère d'intégrabilité	277
8.10- Suites de fonctions intégrables	279
8.11- Autre définition de l'intégrale de Riemann	281
8.12- Fonctions à valeurs complexes	284
8.13- Exercices	285

Chapitre 9 : Primitives - Calcul des intégrales

289

9.1 - Primitives	289
9.2 - Calcul des intégrales	296
9.3 - Changement de variable	300
9.4 - Intégration des fractions rationnelles	304
9.5 - Calcul des intégrales de la forme $\int f(\cos x, \sin x) dx$ où f est un polynôme ou une fonction rationnelle de deux variables	307
9.6 - intégrales des fonctions contenant des radicaux	310
9.7 - Tableau des primitives usuelles	313
9.8 - Approximation numérique des intégrales ; Méthode des trapèzes	315
9.9 - Exercices	316

Chapitre 10 : Equations différentielles	319
10.1- Généralités - Définitions	320
10.2- Problème de Cauchy - Interprétation géométrique	322
10.3- Equations à variables séparées	323
10.4- Cas d'équations se ramenant à une équation à variables séparées	325
10.5- Equations linéaires	327
10.6- Méthode de résolution de l'équation linéaire avec second membre	329
10.7- Existence et unicité des solutions	331
10.8- Equation de Bernoulli	334
10.9- Equation de Riccati	335
10.10- Equation de Lagrange	336
10.11- Equation de Clairaut	338
10.12- Equations linéaires	339
10.13- Propriétés des solutions de l'équation sans second membre	341
10.14- Espace vectoriel des solutions	345
10.15- Equations linéaires à coefficients constants	347
10.16- Equations linéaires avec second membre	351
10.17- Méthode de la variation des constantes	356
10.18- Equation d'Euler	358
10.19- Equation de Legendre	360
10.20- Equations différentielles dont l'ordre peut-être abaissé	360
10.21- Notions sur les systèmes différentiels	362
10.22- Systèmes différentiels linéaires	363
10.23- Exercices	366

Volume (2)

Chapitre 11 : Propriétés topologiques de \mathbf{R}^n	371
11.1 - Notions générales de distance	371
11.2 - Norme sur un espace vectoriel	373
11.3 - Normes sur \mathbf{R}^n	375
11.4 - Propriétés topologiques de \mathbf{R}^n	379
11.5 - Exercices	390
Chapitre 12 : Continuité des fonctions de plusieurs variables	393
12.1 - Généralités sur les fonctions de plusieurs variables	394
12.2 - Limite d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}	396
12.3 - Continuité d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}	400

12.4 - Limite et continuité en un point d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^m	404
12.5 - Continuité sur un ensemble	407
12.6 - Continuité uniforme	410
12.7 - Exercices	412

Chapitre 13 : Fonctions différentiables 417

13.1 - Définition et premières propriétés des fonctions différentiables	419
13.2 - Opérations algébriques sur les fonctions différentiables	428
13.3 - Dérivées partielles - Matrice jacobienne	432
13.4 - Composition des applications différentiables	441
13.5 - Dérivée suivant un vecteur, dérivée directionnelle	448
13.6 - Exercices	451

Chapitre 14 : Théorèmes généraux du calcul différentiel et extrema 457

14.1 - Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1	457
14.2 - Le théorème des accroissements finis	463
14.3 - Formule de Taylor	467
14.4 - Extrema libres	471
14.5 - Le théorème des fonctions implicites	478
14.6 - Exercices	485

Chapitre 15 : Courbes planes représentées paramétriquement 491

15.1 - Fonctions vectorielles d'une variable réelle	491
15.2 - Représentation paramétrique des courbes	493
15.3 - Etude d'une courbe plane au voisinage d'un point	494
15.4 - Disposition d'une courbe par rapport à la tangente	498
15.5 - Branches infinies	504
15.6 - Recherche pratique des asymptotes	507
15.7 - Points doubles	512
15.8 - Plan d'étude pour la construction d'une courbe plane	514
15.9 - Exercices	517
15.10 - Courbes en coordonnées polaires	525

+ Chapitre 16 : Intégrales multiples 547

16.1 - Introduction	547
16.2 - Notion de pavé	547

16.3 - Ensemble pavable	548
16.4 - Ensembles mesurables dans \mathbf{R}^n	549
16.5 - Définition et propriétés de l'intégrale double	550
16.6 - Calcul d'une intégrale double	554
16.7 - Changement de variables dans les intégrales doubles	556
16.8 - Intégrales triples	559
Chapitre 17 : Intégrales curvilignes	569
17.1 - Chemins de \mathbf{R}^n et orientation	569
17.2 - Formes différentielles de degré 1 sur \mathbf{R}^n	571
17.3 - Intégrale d'une forme différentielle	572
17.4 - Interprétation vectorielle de l'intégrale curviligne	575
17.5 - Cas d'une forme différentielle exacte	576
17.6 - Formule de Green-Riemann	580
Index :	587

25338/3

D.E. MEDJADI

Professeur E.N.S

M. BOUKRA

Maître-Assistant E.N.S

A. DJADANE

Chargé de cours E.N.S

B.K. SADALLAH

Chargé de cours E.N.S

ANALYSE MATHÉMATIQUE

1ère année d'Université

Fonctions de plusieurs variables réelles

Volume 2

OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

11488 N₂

D.E. MEDJADI
Professeur E.N.S

M. BOUKRA
Maitre-Assistant E.N.S

A. DJADANE
Chargé de cours E.N.S

B.K. SADALLAH
Chargé de cours E.N.S

23338

$\frac{3}{10}$

ANALYSE MATHÉMATIQUE

1ère année d'Université

Volume 2



Fonctions de plusieurs variables réelles

REIMPRESSION 2001



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES
1, Place centrale de Ben-Aknoun (Alger)

Volume (1)

<u>Avant-propos</u>	<i>i</i>
<u>Chapitre 0 : Rappels d'algèbre</u>	1
0.1 - Applications	1
0.2 - Propriétés des applications	2
0.3 - Factorisation d'une application	5
0.4 - Lois de composition	6
0.5 - Qualités et propriétés des lois de composition interne	7
0.6 - Groupes	12
0.7 - Anneaux	15
0.8 - Corps	17
0.9 - Espaces vectoriels	18
0.10- Relation d'ordre	20
0.11- Cardinaux	24
0.12- Exercices	25
<u>Chapitre 1 : Construction algébrique de \mathbf{R}</u>	27
1.1 - Introduction	27
1.2 - Sections	28
1.3 - Ensemble des nombres réels	36
<u>Chapitre 2 : Propriétés topologiques de \mathbf{R}</u>	39
2.1 - Ensembles ouverts dans \mathbf{R}	39
2.2 - Voisinages d'un point	41
2.3 - Points adhérents à un ensemble	42
2.4 - Ensembles fermés dans \mathbf{R}	43
2.5 - Ensembles bornés	46
2.6 - Exercices	47
<u>Chapitre 3 : Suites numériques</u>	51
3.1 - Généralités	52
3.2 - Nature d'une suite réelle	54
3.3 - Règles de calcul	59
3.4 - Convergence des suites monotones	65
3.5 - Suites adjacentes	68
3.6 - Suites extraites	71
3.7 - Théorème de Bolzano-Weierstrass	74

Table des matières

IV

3.8 - Suites de Cauchy	79
3.9 - Suites complexes	82
3.10- Exercices	84
<u>Chapitre 4 : Fonctions réelles d'une variable réelle</u>	93
4.1 - Généralités	93
4.2 - Propriétés éventuelles d'une fonction	95
4.3 - Limite d'une fonction	99
4.4 - Notion de continuité	108
4.5 - Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues	116
4.6 - Suites de fonctions	125
<u>Chapitre 5 : Dérivation</u>	129
5.1 - Dérivée d'une fonction réelle d'une variable réelle en un point	129
5.2 - Différentiabilité en un point	131
5.3 - Propriétés de la dérivation	132
5.4 - Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	139
5.5 - Formule de Taylor-Lagrange	147
5.6 - Fonctions convexes	150
5.7 - Exercices	154
<u>Chapitre 6 : Fonctions élémentaires</u>	159
6.1 - Fonction logarithme népérien	160
6.2 - Logarithme de base quelconque	167
6.3 - Fonction exponentielle de base e	168
6.4 - Fonction exponentielle de base quelconque	171
6.5 - Fonction puissance	173
6.6 - Fonctions circulaires réciproques	176
6.7 - Fonctions hyperboliques	179
6.8 - Fonctions hyperboliques réciproques	182
6.9 - Exercices	185
<u>Chapitre 7 : Les développements limités</u>	193
7.1 - Infiniment petits , infiniment grands	194
7.2 - Relations de comparaison - Notations o et O de Landau	195
7.3 - Propriétés générales des symboles o et O	196
7.4 - Fonctions équivalentes au voisinage d'un point	199
7.5 - Ordre d'un infiniment petit	202
7.6 - Développements limités au voisinage de 0	205

7.7 - Une méthode de recherche d'un développement limité	211
7.8 - Une propriété éventuelle du développement limité	212
7.9 - Développement limités usuels	213
7.10- Calculs sur les développements limités	217
7.11- Technique n'utilisant pas la division des polynômes	225
7.12- Technique utilisant la division des polynômes	226
7.13- Dérivation et intégration des développements limités	230
7.14- Développement limités usuels au voisinage de zéro	234
7.15- Développement limités généralisés	235
7.16- Développement asymptotiques à l'infini	237
7.17- Applications des développements limités	238
7.18- Exercices	242
Chapitre 8 : L'intégrale de Riemann	249
8.1 - Définition des fonctions en escalier	250
8.2 - Propriétés des fonctions en escalier	251
8.3 - Intégrale des fonctions en escalier	253
8.4 - Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier	255
8.5 - Fonctions intégrables au sens de Riemann	258
8.6 - Classe des fonctions intégrables	261
8.7 - Propriétés des fonctions intégrables	266
8.8 - Produit de fonctions intégrables, Théorème de la moyenne, Inégalités de Schwarz et de Minkowski	274
8.9 - Autre critère d'intégrabilité	277
8.10- Suites de fonctions intégrables	279
8.11- Autre définition de l'intégrale de Riemann	281
8.12- Fonctions à valeurs complexes	284
8.13- Exercices	285
Chapitre 9 : Primitives - Calcul des intégrales	289
9.1 - Primitives	289
9.2 - Calcul des intégrales	296
9.3 - Changement de variable	300
9.4 - Intégration des fractions rationnelles	304
9.5 - Calcul des intégrales de la forme $\int f(\cos x, \sin x) dx$ où f est un polynôme ou une fonction rationnelle de deux variables	307
9.6 - intégrales des fonctions contenant des radicaux	310
9.7 - Tableau des primitives usuelles	313
9.8 - Approximation numérique des intégrales ; Méthode des trapèzes	315
9.9 - Exercices	316

Chapitre 10 : Equations différentielles	319
10.1- Généralités - Définitions	320
10.2- Problème de Cauchy - Interprétation géométrique	322
10.3- Equations à variables séparées	323
10.4- Cas d'équations se ramenant à une équation à variables séparées	325
10.5- Equations linéaires	327
10.6- Méthode de résolution de l'équation linéaire avec second membre	329
10.7- Existence et unicité des solutions	331
10.8- Equation de Bernoulli	334
10.9- Equation de Riccati	335
10.10- Equation de Lagrange	336
10.11- Equation de Clairaut	338
10.12- Equations linéaires	339
10.13- Propriétés des solutions de l'équation sans second membre	341
10.14- Espace vectoriel des solutions	345
10.15- Equations linéaires à coefficients constants	347
10.16- Equations linéaires avec second membre	351
10.17- Méthode de la variation des constantes	356
10.18- Equation d'Euler	358
10.19- Equation de Legendre	360
10.20- Equations différentielles dont l'ordre peut-être abaissé	360
10.21- Notions sur les systèmes différentiels	362
10.22- Systèmes différentiels linéaires	363
10.23- Exercices	366

Volume (2)

Chapitre 11 : Propriétés topologiques de \mathbf{R}^n	371
11.1 - Notions générales de distance	371
11.2 - Norme sur un espace vectoriel	373
11.3 - Normes sur \mathbf{R}^n	375
11.4 - Propriétés topologiques de \mathbf{R}^n	379
11.5 - Exercices	390
Chapitre 12 : Continuité des fonctions de plusieurs variables	393
12.1 - Généralités sur les fonctions de plusieurs variables	394
12.2 - Limite d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}	396
12.3 - Continuité d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}	400

12.4 - Limite et continuité en un point d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^m	404
12.5 - Continuité sur un ensemble	407
12.6 - Continuité uniforme	410
12.7 - Exercices	412
Chapitre 13 : Fonctions différentiables	417
13.1 - Définition et premières propriétés des fonctions différentiables	419
13.2 - Opérations algébriques sur les fonctions différentiables	428
13.3 - Dérivées partielles - Matrice jacobienne	432
13.4 - Composition des applications différentiables	441
13.5 - Dérivée suivant un vecteur, dérivée directionnelle	448
13.6 - Exercices	451
Chapitre 14 : Théorèmes généraux du calcul différentiel et extrema	457
14.1 - Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1	457
14.2 - Le théorème des accroissements finis	463
14.3 - Formule de Taylor	467
14.4 - Extrema libres	471
14.5 - Le théorème des fonctions implicites	478
14.6 - Exercices	485
Chapitre 15 : Courbes planes représentées paramétriquement	491
15.1 - Fonctions vectorielles d'une variable réelle	491
15.2 - Représentation paramétrique des courbes	493
15.3 - Etude d'une courbe plane au voisinage d'un point	494
15.4 - Disposition d'une courbe par rapport à la tangente	498
15.5 - Branches infinies	504
15.6 - Recherche pratique des asymptotes	507
15.7 - Points doubles	512
15.8 - Plan d'étude pour la construction d'une courbe plane	514
15.9 - Exercices	517
15.10 - Courbes en coordonnées polaires	525
Chapitre 16 : Intégrales multiples	547
16.1 - Introduction	547
16.2 - Notion de pavé	547

16.3 - Ensemble pavable	548
16.4 - Ensembles mesurables dans \mathbf{R}^n	549
16.5 - Définition et propriétés de l'intégrale double	550
16.6 - Calcul d'une intégrale double	554
16.7 - Changement de variables dans les intégrales doubles	556
16.8 - Intégrales triples	559
Chapitre 17 : Intégrales curvilignes	569
17.1 - Chemins de \mathbf{R}^n et orientation	569
17.2 - Formes différentielles de degré 1 sur \mathbf{R}^n	571
17.3 - Intégrale d'une forme différentielle	572
17.4 - Interprétation vectorielle de l'intégrale curviligne	575
17.5 - Cas d'une forme différentielle exacte	576
17.6 - Formule de Green-Riemann	580
Index :	587

Cet ouvrage comprend deux volumes. Les fonctions d'une variable réelle sont traitées dans le premier (*Topologie de \mathbb{R} , Suites numériques, Continuité, Dérivabilité, Fonctions élémentaires, développements limités, Intégrales de Riemann, Primitives, Equations différentielles*).

Dans le second volume sont abordées les fonctions de plusieurs variables réelles (*Topologie de \mathbb{R}^n , Continuité, Différentiabilité, Extrema, Courbes planes, Intégrales multiples et curvilignes*).

Chaque chapitre est suivi de nombreux exercices servant de modèles et corrigés de façon détaillée.