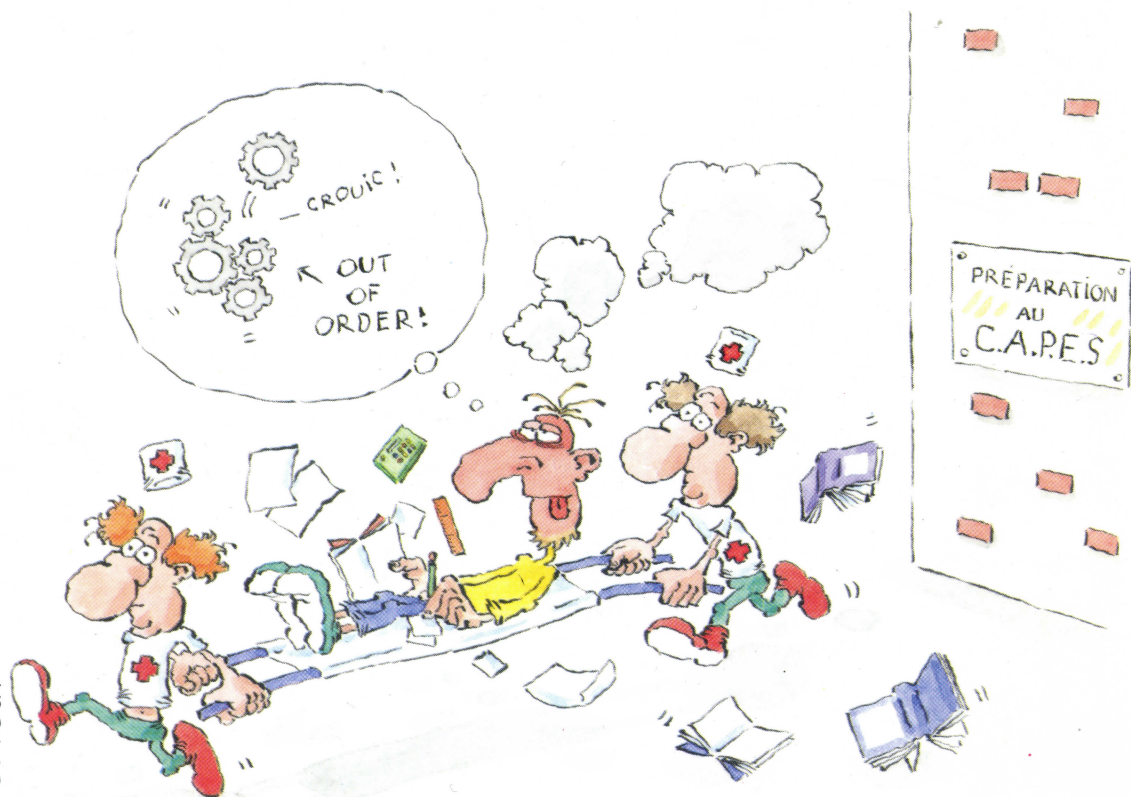


34 problèmes corrigés
posés à l'écrit du CAPES

Mathématiques

Corrigés du comité de rédaction de la RMS
Ouvrage coordonné par Jacques Chevallet

**AVEC LES
RAPPORTS
DU JURY**



Nicolas
DAHAN

vuibert supérieur

Série « Grandes annales des concours »

34 problèmes corrigés
posés à l'écrit du CAPES

AVEC LES
RAPPORTS
DU JURY

Mathématiques

Annales intégrales du concours depuis 1981
Corrigés du comité de rédaction de la RMS
Ouvrage coordonné par Jacques Chevallet

M484

Jacques Chevallet

Agrégé de mathématiques, ancien élève de l'École normale supérieure,
Professeur en classe préparatoire scientifique MP* au lycée Louis le Grand, Paris

22062 $\frac{2}{3}$



vuibert supérieur

Série « Grandes annales des concours »

TABLE DES MATIÈRES

PREMIER PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1981 – 1^{re} épreuve

Définition et propriétés de l'intégrale de Perron

Énoncé 1 Rapport du jury 3 Corrigé 5

DEUXIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1981 – 2^e épreuve

Groupe des similitudes d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3 ; groupe $O_3(\mathbb{R})$. Équation $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ dans \mathbb{C} . Structure d'anneau euclidien de l'ensemble des entiers de Gauss, p.g.c.d. Application au groupe $O_3(\mathbb{Q})$

Énoncé 10 Rapport du jury 13 Corrigé 15

TROISIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1982 – 1^{re} épreuve

Fonction gamma : définitions de Gauss et de Weierstrass. Formule des compléments. Développement en série entière lié à $\text{Log } \Gamma(x)$. Constante d'Euler et fonction dzéta

Énoncé 23 Rapport du jury 26 Corrigé 27

QUATRIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1982 – 2^e épreuve

Études des expansions et isométries d'une partie de \mathbb{R}^n muni de différentes normes

Énoncé 33 Rapport du jury 35 Corrigé 37

CINQUIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1983 – 1^{re} épreuve

La fonction $x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$ n'est pas bornée

Énoncé 45 Rapport du jury 48 Corrigé 50

SIXIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1983 – 2^e épreuve

Étude des parties convexes fermées d'un plan affine euclidien tel que toute projection orthogonale sur toute droite du plan est de longueur 1 (roues de diamètre 1)

Énoncé 57 Rapport du jury 59 Corrigé 61

SEPTIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1984 – 1^{re} épreuve

Équations fonctionnelles $f'(t) = e^{\alpha t} f(\lambda t)$ et $g'(x) = g(x^\lambda)$

Énoncé 69 Rapport du jury 72 Corrigé 74

HUITIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1984 – 2^e épreuve

Étude du corps des quaternions

Énoncé 80 Rapport du jury 82 Corrigé 83

NEUVIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1985 – 1^{re} épreuve

Comportement asymptotique et global des solutions de $y' + ay = f$

Énoncé 89 Corrigé 92

DIXIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1986 – 1^{re} épreuve

Approximation des fonctions continues 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} par les méthodes de Fourier, de Fejer et de Jackson

Énoncé 99 Corrigé 104

ONZIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1987 – 1^{re} épreuve

Accélération de la convergence des séries alternées (méthode d'Euler)

Énoncé 112 Rapport du jury 117 Corrigé 118

DOUZIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1987 – 2^e épreuve

Étude du produit des distances d'un point d'un plan euclidien aux sommets d'un polygone du cercle unité

Énoncé 128 Rapport du jury 131 Corrigé 132

TREIZIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1988 – 1^{re} épreuve

Diverses expressions de la constante d'Euler γ . Valeurs approchées de γ

Énoncé 135 Rapport du jury 140 Corrigé 141

QUATORZIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1988 – 2^e épreuve

Étude de transformations de polygones

Énoncé 150 Rapport du jury 154 Corrigé 156

QUINZIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1989 – 1^{re} épreuve

Polynômes et opérateur de Legendre. Inégalités de Markov. Développement d'une fonction lipschitzienne en série de polynômes de Legendre

Énoncé 164 Rapport du jury 170 Corrigé 172

SEIZIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1989 – 2^e épreuve

Espace vectoriel de fonctions définies sur $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq x \leq N, 0 \leq y \leq M\}$. Interprétations matricielle et probabiliste

Énoncé 183 Rapport du jury 188 Corrigé 191

DIX-SEPTIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1990 – 1^{re} épreuve

Critères de positivité d'une matrice hermitienne. Localisation du spectre d'un endomorphisme continu d'espace de Hilbert. Exemples

Énoncé 198 Rapport du jury 204 Corrigé 207

DIX-HUITIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1990 – 2^e épreuve

Ensemble $d(\varepsilon)$ des points M d'un plan euclidien tels que $\sum_{i=1}^n \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2} = 0$, où $\varepsilon = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

Énoncé 216 Rapport du jury 220 Corrigé 223

DIX-NEUVIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1991 – 1^{re} épreuve

Estimation des dérivées intermédiaires d'une fonction de classe C^n

Énoncé 231 Rapport du jury 237 Corrigé 240

VINGTIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1991 – 2^e épreuve

Équation récurrente de suites de Tchebitcheff de seconde espèce. Application à un problème de géométrie euclidienne plane

Énoncé 250 Rapport du jury 253 Corrigé 255

VINGT ET UNIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1992 – 1^{re} épreuve

Propriétés des courbes définies par $\sum_{1 \leq m \leq N} m^y \cos(x \ln m) = 0$ et

$$\sum_{1 \leq m \leq N} m^y \sin(x \ln m) = 0$$

Énoncé 261 Rapport du jury 264 Corrigé 268

VINGT-DEUXIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1992 – 2^e épreuve

Étude de parties de \mathbb{R}^2 contenant un nombre donné de points entiers

Énoncé 274 Rapport du jury 279 Corrigé 281

VINGT-TROISIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1993 – 1^{re} épreuve

Étude de la transformation S définie par $S\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\phi(t)}{x^2 + t^2} dt$

Énoncé 286 Rapport du jury 291 Corrigé 293

VINGT-QUATRIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1992 – 2^e épreuve

Étude des ensembles de droites concourantes faisant entre elles, deux à deux, un angle constant donné

Énoncé 300 Rapport du jury 304 Corrigé 307

VINGT-CINQUIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1994 – 1^{re} épreuve

Étude de $r_k = \min\{r > 0 ; \exists z_0 \in \mathbb{C}, \text{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(z_0, r)) \geq k\}$. Équivalent de la suite (r_k) quand k tend vers $+\infty$

Énoncé 313 Rapport du jury 318 Corrigé 321

VINGT-SIXIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1994 – 2^e épreuve

Étude de la cocyclicité de quatre points d'une conique

Énoncé 329 Rapport du jury 336 Corrigé 337

VINGT-SEPTIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1995 – 1^{re} épreuve

Moyenne arithmético-géométrique. Étude d'un algorithme voisin de celui de Salamin et donnant une suite qui converge très rapidement vers π

Énoncé 349 Rapport du jury 355 Corrigé 359

VINGT-HUITIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1995 – 2^e épreuve

Sections circulaires des quadriques. Décomposition de Choleski d'une matrice symétrique réelle définie positive

Énoncé 371 Rapport du jury 376 Corrigé 379

VINGT-NEUVIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1996 – 1^{re} épreuve

Problème de Dirichlet : recherche des solutions d'une équation différentielle satisfaisant à des conditions aux bords, en liaison avec le principe du maximum

Énoncé 389 Rapport du jury 393 Corrigé 398

TRENTIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1996 – 2^e épreuve

Étude du squelette d'une partie bornée du plan

Énoncé 409 Rapport du jury 413 Corrigé 415

TRENTE ET UNIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1997 – 1^{re} épreuve

Étude de la fonction $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$. Développements asymptotiques de

$$\rho_\alpha(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$$

Énoncé 427 Rapport du jury 433 Corrigé 437

TRENTE-DEUXIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1997 – 2^e épreuve

Étude de propriétés de triangles inscrits dans une hyperbole équilatère

Énoncé 455 Rapport du jury 459 Corrigé 462

TRENTE-TROISIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1998 – 1^{re} épreuve

Étude de suites récurrentes $x_{n+1} = f(x_n)$. Définition et comportement. Vitesse de convergence en un point fixe attractif et non attractif

Énoncé 468 Corrigé 473

TRENTE-QUATRIÈME PROBLÈME : C.A.P.E.S. externe 1998 – 2^e épreuve

Points isogonaux relativement à un triangle. Triangles orthologiques. Isogonie et orthologie

Énoncé 494 Corrigé 498

34 problèmes corrigés posés à l'écrit du CAPES Mathématiques

**AVEC LES
RAPPORTS
DU JURY**

Corrigés du comité de rédaction de la RMS
Ouvrage coordonné par Jacques Chevallet

Voici la nouvelle édition – mise à jour et enrichie – des annales de l'écrit du CAPES. On y trouvera tous les sujets posés depuis 1981, rigoureusement corrigés et accompagnés des **rapports du jury**.

Ces **34 problèmes** offrent une couverture exhaustive du programme.

Quand on sait que les exigences du jury (et le nombre de candidats) vont croissant, pareille somme offre la garantie d'une préparation sans faille.

Issus des travaux permanents du comité de rédaction de la *Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur* – anciennement *Revue de mathématiques spéciales* – ces corrigés reflètent explicitement ce que l'on attend des futurs enseignants le jour de l'épreuve : une copie soigneusement rédigée contenant des **démonstrations complètement développées**.

L'exhaustivité des thèmes traités, la qualité avérée des corrigés et la fidèle reproduction des rapports du jury confèrent à cet outil de travail une efficacité sans précédent.

Également aux éditions Vuibert :

Ariel Dufetel & Marie-Thérèse Lacroix-Sonrier, *Analyse : Cours & exercices résolus. Épreuve écrite du CAPES*, deuxième édition corrigée et augmentée, préface d'André Warusfel, coédition Vuibert/CNED, 496 pages – ISBN 2 7117 8909 8

Jean-Marie Arnaudès, *Mathématiques : 14 problèmes corrigés posés à l'agrégation interne. Avec une théorie de la réduction des endomorphismes*, 344 p. – ISBN 2 7117 8905 5

Olivier Coutarel, *Mathématiques : 35 problèmes corrigés. Annales des concours CAPLPA2 & CRPLPA2 avec les rapports du jury, tous les sujets 98 et le texte du programme*, 512 p. – ISBN 2 7117 8962 4

L'intégrale de la RMS 108 (année 98/99) : problèmes corrigés, exercices d'oral, questions & réponses, articles de fond (grandes écoles/CAPES/agrégation), relié, 1200 p. – ISBN 2 7117 9097 5

Illustration de couverture : dessin original de Nicolas Dahan – ISBN 2 7117 8887 3

Éditeur depuis 1877, Vuibert publie la *Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur (RMS)* : plus de 1200 pages par an de problèmes corrigés des concours et des examens, d'exercices posés à l'oral, d'articles de fond et de questions diverses.

Dans la collection « Grandes annales des concours » :

301 nouveaux sujets corrigés X•Centrale•Mines, 448 pages

243 exercices d'algèbre et de géométrie, 304 pages

158 exercices d'analyse : suites & séries, 240 pages

115 exercices d'analyse : intégration - calcul différentiel, 192 pages

vuibert supérieur

