

Cours

Jean-Marie Monier

Analyse 4

Cours et 500 exercices corrigés

2^e année MP, PSI, PC, PT

3^e édition

l'intégrale

DUNOD

M 4 81 / T 4

Analyse 4

Cours et 500 exercices corrigés

2^e année MP, PSI, PC, PT

Jean-Marie Monier

Professeur en classes de Spéciales
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon

22057 $\frac{1}{4}$



3^e édition

DUNOD

Table des matières

Première partie – Cours

Chapitre 4

Suites et séries d'applications 3

4.1	Suites d'applications	4
4.1.1	Convergences	4
4.1.2	Convergence uniforme et limite	9
4.1.3	Convergence uniforme et continuité	10
4.1.4	Convergence uniforme et intégration sur un segment	13
4.1.5	Convergence uniforme et dérivation	16
4.1.6	Convergence d'une suite d'applications et intégration sur un intervalle quelconque	18
4.2	Approximation des fonctions d'une variable réelle	28
4.2.1	Approximation par des fonctions en escalier ou affines par morceaux et continues	28
4.2.2	Approximation par des polynômes	28
4.2.3	Approximation par des polynômes trigonométriques	37
4.3	Séries d'applications	41
4.3.1	Convergences	41
4.3.2	Convergence uniforme et limite	52
4.3.3	Convergence uniforme et continuité	53
4.3.4	Convergence uniforme et intégration sur un segment	57
4.3.5	Convergence uniforme et dérivation	60
4.3.6	Convergence d'une série d'applications et intégration sur un intervalle quelconque	65
	Compléments aux exercices	69

Chapitre 5

Séries entières 81

5.1	Rayon de convergence	82
5.1.1	Notion de série entière	82
5.1.2	Rayon de convergence et somme d'une série entière	82
5.1.3	Comparaisons de rayons	86
5.1.4	Règle de d'Alembert	87
5.2	Opérations sur les séries entières	93
5.2.1	Structure vectorielle	93
5.2.2	Dérivation	95
5.2.3	Produit de deux séries	96

Chapitre 6

5.3	Convergence	98
5.4	Régularité de la somme d'une série entière	100
5.5	Développements en série entière	102
5.5.1	Généralités	102
5.5.2	Opérations sur les fonctions développables en série entière	106
5.5.3	DSE(0) usuels	109
5.6	Fonctions usuelles d'une variable complexe	120
5.6.1	L'exponentielle complexe	120
5.6.2	Fonctions circulaires directes	122
5.6.3	Fonctions hyperboliques directes	124
	Compléments aux exercices	126

Séries de Fourier

131

6.1	Généralités	132
6.1.1	Ensemble \mathcal{CM}_T	132
6.1.2	Coefficients de Fourier d'un élément de \mathcal{CM}_T	133
6.1.3	Série de Fourier d'un élément de \mathcal{CM}_T	137
6.2	Structure préhilbertienne	139
6.2.1	Espace préhilbertien \mathcal{D}_T	139
6.2.2	Famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	141
6.2.3	Le théorème de Parseval	141
6.3	Convergence ponctuelle	146
6.3.1	Convergence normale	146
6.3.2	Le théorème de Dirichlet	147
6.4	Exemples	150
	Compléments aux exercices	156

Chapitre 7

Équations différentielles (2^{ème} étude)

159

7.1	Généralités	160
7.1.1	Définitions	160
7.1.2	Remplacement théorique d'une équation différentielle d'ordre n par une équation différentielle d'ordre 1	161
7.1.3	Équations différentielles autonomes	162
7.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	164
7.2.1	Théorie	164
7.2.2	Exemples d'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz	175
7.3	Systèmes différentiels linéaires du 1 ^{er} ordre	186
7.3.1	Généralités	186
7.3.2	Existence et unicité d'une solution du problème de Cauchy sur tout l'intervalle I	188
7.3.3	Structures de \mathcal{S}_0 et de \mathcal{S}	191
7.3.4	Résolution de (E_0)	192

Chapitre 8

7.3.5	Résolution de (E)	194
7.3.6	Systèmes différentiels linéaires du 1 ^{er} ordre à coefficients constants	196
7.3.7	Systèmes différentiels autonomes linéaires	204
7.4	Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre	209
7.4.1	Généralités	209
7.4.2	Résolution de (E_0)	211
7.4.3	Résolution de (E)	212
7.4.4	Problème des raccords	213
7.4.5	Utilisation de séries entières	217
	Fonctions de plusieurs variables réelles (2^{ème} étude)	223
8.1	Dérivées partielles premières	225
8.1.1	Définitions	225
8.1.2	Applications de classe C^1 sur un ouvert	227
8.1.3	Différentielle d'une application de classe C^1	228
8.1.4	Différentiabilité	235
8.1.5	Inégalité des accroissements finis	239
8.1.6	C^1 -difféomorphismes	242
8.1.7	Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre	249
8.2	Dérivées partielles successives	253
8.2.1	Définition	253
8.2.2	Applications de classe C^k sur un ouvert	254
8.2.3	Interversion des dérivations	255
8.2.4	C^k -difféomorphismes	257
8.2.5	Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre ≥ 2	259
8.3	Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles	263
8.3.1	Définitions	263
8.3.2	Étude à l'ordre 1	263
8.3.3	Étude à l'ordre 2	264
8.3.4	Extremums globaux	270
8.4	Fonctions implicites	273
8.5	Formes différentielles	276
8.5.1	Définition	276
8.5.2	Formes différentielles exactes	276
8.5.3	Formes différentielles fermées	277

Chapitre 9

Compléments de calcul intégral (2^{ème} étude)

9.1	Intégrales de surface	283
9.1.1	Applications de classe C^1	284
9.1.2	Surfaces	284
9.1.3	Intégrales de surface	284
9.2	Aire d'un morceau de surface	287
9.2.1	Généralités	289
9.2.2	Cas particuliers	289
9.3	Flux	290
9.3.1	Généralités	294
9.3.2	Angle solide	294
9.3.3	Théorèmes de Stokes et Ostrogradski	296
9.4	Masse, centre d'inertie, moments d'inertie pour une plaque gauche	299
9.4.1	Plaques gauches	303
9.4.2	Masse d'une plaque gauche	303
9.4.3	Centre d'inertie d'une plaque gauche	303
9.4.4	Moments d'inertie d'une plaque gauche	304
		304
		309

Deuxième partie

Indications et réponses des exercices

Chap. 4, **315** ; Chap. 5, **389** ; Chap. 6, **423** ; Chap. 7, **443** ; Chap. 8, **465** ;
Chap. 9, **491**.

Index des notations	497
Index alphabétique	499

Jean-Marie Monier

3^e édition

ANALYSE 4

Cours et 500 exercices corrigés

COURS

Cette nouvelle édition du *cours de mathématiques* de Jean-Marie Monier a été entièrement repensée, de manière à répondre très précisément aux aspirations les plus exigeantes des élèves des classes préparatoires : un format agrandi et une nouvelle mise en pages en deux couleurs en améliorent la convivialité et la lisibilité.

JEAN-MARIE MONIER est professeur en classe de Spéciales au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon.

Chaque chapitre s'ouvre par une introduction signalant les **prérequis** et dégageant les **objectifs à atteindre**. Une nouvelle rubrique, intitulée « **Du cours aux exercices** », regroupe des conseils de méthodologie pour aider l'étudiant dans la résolution des exercices qui suivent. Des questions situées à la limite du programme sont traitées, en fin de chapitre, sous forme de compléments avec solutions détaillées. Enfin des notes en marge donnent des informations complémentaires au cours (rappels, schémas, conseils...), et des encadrés mettent en valeur les points les plus importants (théorèmes, définitions et propositions à retenir).

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1^{er} cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

COURS		EXERCICES CORRIGÉS		
	ANALYSE	ALGÈBRE	ANALYSE	ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE
SUP	MPSI • PCSI • PTSI		MPSI	
	Analyse 1	Algèbre 1	Analyse MPSI	Algèbre et géométrie MPSI
	Analyse 2	Géométrie 1 ^{re} et 2 ^e années	PCSI • PTSI	
			Analyse PCSI • PTSI	Algèbre et géométrie PCSI • PTSI
SPÉ	MP • PSI • PC • PT		MP	
	Analyse 3	Algèbre 2	Analyse MP	Algèbre et géométrie MP
	Analyse 4	Géométrie 1 ^{re} et 2 ^e années	PSI • PC • PT	
			Analyse PSI • PC • PT	Algèbre et géométrie PSI • PC • PT



ISBN 2 10 004916 X
Code 044916

<http://www.dunod.com>

