

Cours

Jean-Marie Monier

Analyse 3

Cours et 500 exercices corrigés

2^e année MP, PSI, PC, PT

3^e édition

l'intégrale

DUNOD

M481/T3

Analyse 3

Cours et 500 exercices corrigés

2^e année MP, PSI, PC, PT

Jean-Marie Monier

Professeur en classes de Spéciales
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon



22058 $\frac{4}{4}$

3^e édition

DUNOD

Table des matières

Première partie – Cours

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

3

1.1	Vocabulaire de la topologie d'un espace vectoriel normé	4
1.1.1	Norme, distance associée	4
1.1.2	Boules, sphères	12
1.1.3	Parties bornées d'un evn	13
1.1.4	Voisinages	14
1.1.5	Ouverts, fermés	15
1.1.6	Comparaison de normes	19
1.1.7	Intérieur, adhérence, frontière	24
1.1.8	Distance d'un point à une partie non vide d'un evn	28
1.1.9	Suites dans un evn	29
1.1.10	Supplément : points d'accumulation, point isolés	36
1.2	Limites, continuité	37
1.2.1	Limites	37
1.2.2	Continuité	41
1.2.3	Continuité uniforme	45
1.2.4	Applications lipschitziennes	46
1.2.5	Supplément : homéomorphismes	49
1.2.6	Applications linéaires continues	51
1.3	Compacité	56
1.3.1	Généralités	56
1.3.2	Cas de la dimension finie	63
1.4	Complétude	67
1.4.1	Suites de Cauchy	67
1.4.2	Parties complètes	68
1.4.3	Approfondissement pour MP* : théorème du point fixe	73
1.5	Connexité par arcs	74
1.5.1	Connexité par arcs dans un evn de dimension finie	74
1.5.2	Supplément : connexité	78
1.5.3	Supplément : composantes connexes	82
1.6	Espaces préhilbertiens	84
1.6.1	Produit scalaire	84
1.6.2	Inégalités, normes euclidiennes	88
1.6.3	Orthogonalité	92
1.6.4	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	96

Chapitre 2

1.6.5	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	98
1.6.6	Norme d'un endomorphisme d'un espace euclidien	101
	Compléments aux exercices	104
	Fonctions vectorielles d'une variable réelle	107
2.1	Généralités	108
2.1.1	Structure de E^X	108
2.1.2	Parité	110
2.1.3	Périodicité	111
2.1.4	Applications bornées	112
2.1.5	Limites	114
2.1.6	Continuité par morceaux	116
2.2	Dérivation	118
2.2.1	Dérivée en un point	118
2.2.2	Propriétés algébriques des applications dérivables en un point	120
2.2.3	Application dérivée	122
2.2.4	Dérivées successives	125
2.2.5	Classe d'une application	127
2.2.6	Supplément : différentielle	131
2.2.7	Dérivation des fonctions à valeurs matricielles	131
2.3	Intégration sur un segment	133
2.3.1	Intégration des applications en escalier sur un segment	133
2.3.2	Suites d'applications (1 ^{re} étude)	136
2.3.3	Approximation uniforme par des applications en escalier ou par des applications affines par morceaux et continues	140
2.3.4	Intégration des applications continues par morceaux sur un segment	142
2.3.5	Sommes de Riemann	150
2.3.6	Intégration et dérivation	152
2.3.7	Inégalité des accroissements finis	155
2.3.8	Changement de variable	157
2.3.9	Intégration par parties	159
2.3.10	Formule de Taylor avec reste intégral	160
2.3.11	Théorème de relèvement	161
2.3.12	Intégrales dépendant d'un paramètre	162
2.4	Comparaison locale	173
2.4.1	Prépondérance, domination	173
2.4.2	Équivalence	175
2.4.3	Développements limités vectoriels	176
2.5	Intégration sur un intervalle quelconque	178
2.5.1	Fonctions intégrables à valeurs positives ou nulles	178
2.5.2	Fonctions intégrables à valeurs complexes	190
2.5.3	Intégrations des relations de comparaison	208
2.5.4	Intégrales impropres	210
2.5.5	Intégrales dépendant d'un paramètre	215
	Compléments aux exercices	225

Chapitre 3

Séries

227

3.1	Séries à termes dans un evn	228
3.1.1	Généralités	228
3.1.2	Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes	231
3.2	Séries à termes dans \mathbb{R}_+	234
3.2.1	Lemme fondamental	234
3.2.2	Théorèmes de comparaison	234
3.2.3	Séries de Riemann	236
3.2.4	Série géométrique	238
3.3	Séries à termes dans un evn	249
3.3.1	CNS de Cauchy	249
3.3.2	Convergence absolue	251
3.3.3	Séries usuelles dans un algèbre de Banach	254
3.3.4	Suites sommables de réels ou de complexes	256
3.3.5	Séries alternées	262
3.3.6	Exemples d'utilisation d'un développement asymptotique	263
3.3.7	Comparaison d'une série à un intégrale	266
3.3.8	Étude de la somme d'une série	274
3.3.9	Sommation des relations de comparaison	280
3.3.10	Supplément : groupement de termes	283
3.4	Familles sommables	286
3.4.1	Notion de dénombrabilité	286
3.4.2	Familles sommables d'éléments de \mathbb{K}	287
	Compléments aux exercices	303

Deuxième partie

Indications et réponses des exercices

Chap. 1, 311 ; Chap. 2, 343 ; Chap. 3, 399

Index des notations 443

Index alphabétique 445

Jean-Marie Monier

3^e édition

ANALYSE 3

Cours et 500 exercices corrigés

COURS






Cette nouvelle édition du *cours de mathématiques* de Jean-Marie Monier a été entièrement repensée, de manière à répondre très précisément aux aspirations les plus exigeantes des élèves des classes préparatoires : un format agrandi et une nouvelle mise en pages en deux couleurs en améliorent la convivialité et la lisibilité.

JEAN-MARIE MONIER
est professeur en classe de Spéciales au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon.

Chaque chapitre s'ouvre par une introduction signalant les **prérequis** et dégageant les **objectifs à atteindre**. Une nouvelle rubrique, intitulée « **Du cours aux exercices** », regroupe des conseils de méthodologie pour aider l'étudiant dans la résolution des exercices qui suivent. Des questions situées à la limite du programme sont traitées, en fin de chapitre, sous forme de compléments avec solutions détaillées. Enfin des notes en marge donnent des informations complémentaires au cours (rappels, schémas, conseils...), et des encadrés mettent en valeur les points les plus importants (théorèmes, définitions et propositions à retenir).

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familial, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1^{er} cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

COURS		EXERCICES CORRIGÉS		
	ANALYSE	ALGÈBRE	ANALYSE	ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE
SUP	MPSI • PCSI • PTSI		MPSI	
	Analyse 1	Algèbre 1	Analyse MPSI	Algèbre et géométrie MPSI
	Analyse 2	Géométrie 1 ^{re} et 2 ^e années	PCSI • PTSI	
			Analyse PCSI • PTSI	Algèbre et géométrie PCSI • PTSI
SPÉ	MP • PSI • PC • PT		MP	
	Analyse 3	Algèbre 2	Analyse MP	Algèbre et géométrie MP
	Analyse 4	Géométrie 1 ^{re} et 2 ^e années	PSI • PC • PT	
			Analyse PSI • PC • PT	Algèbre et géométrie PSI • PC • PT

-  MATHÉMATIQUES
-  PHYSIQUE
-  CHIMIE
-  SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
-  INFORMATIQUE



ISBN 2 10 0044917 8
Code 044917

<http://www.dunod.com>

