

Nouveau cours de mathématiques  
Tome 1

Jean-Marie MONIER

# ANALYSE 1

cours et

300 exercices corrigés

1<sup>re</sup> année

MPSI . PCSI . PTSI

*l'intégrale*

PRÉPAS SCIENTIFIQUES

DUNOD

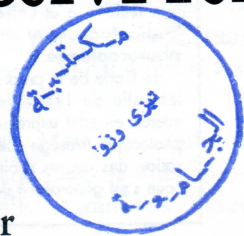
Cours de mathématiques - 1

M481/1

# ANALYSE I

cours et  
300 exercices corrigés

1<sup>re</sup> année MPSI . PCSI . PTSI



**Jean-Marie Monier**  
*Professeur en classe de Spéciales*  
*au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon*

4991



2<sup>e</sup> édition  
conforme aux nouveaux programmes  
(B.O.E.N. 27 juillet 1995)

DUNOD

# Table des matières du tome 1

## Première partie – Cours

Chapitre 1. – Les nombres réels	3
<b>1.1.</b> Préambule	3
<b>1.2.</b> Nombres réels	4
1.2.1. Existence et unicité de $\mathbb{R}$	4
1.2.2. Propriétés élémentaires des nombres réels	6
1.2.3. Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$	12
<b>1.3.</b> Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$	20
Compléments	21
Chapitre 2. – Les nombres complexes	23
<b>2.1.</b> Préambule	23
<b>2.2.</b> Corps des nombres complexes	23
2.2.1. Définition	23
2.2.2. Conjugaison, partie réelle, partie imaginaire	25
2.2.3. Module	27
2.2.4. Arguments	29
<b>2.3.</b> Interprétation géométrique des nombres complexes	30
2.3.1. Plan complexe	30
2.3.2. Interprétation géométrique de l'addition dans $\mathbb{C}$	31
2.3.3. Interprétation géométrique de la multiplication dans $\mathbb{C}$	31
2.3.4. Applications $z \mapsto az + b$	32
2.3.5. CNS d'alignement de trois points du plan complexe	32
2.3.6. CNS de cocyclicité ou alignement de quatre points du plan complexe	33
<b>2.4.</b> Puissances et racines	34
2.4.1. Exponentielle d'un imaginaire pur	34
2.4.2. Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul	34
2.4.3. Racines $n^{\text{èmes}}$ de 1	37
2.4.4. Groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1	38

<b>2.5.</b> Applications trigonométriques des nombres complexes	39
2.5.1. Développement de $\cos n\theta$ , $\sin n\theta$ , $\tan n\theta$	39
2.5.2. Linéarisation de $\cos^p \theta$ , $\sin^p \theta$ , $\cos^p \theta \sin^q \theta$	39
Compléments	42

## Chapitre 3. – Suites numériques

43

<b>3.1.</b> Convergence, divergence	43
3.1.1. Définitions	43
3.1.2. Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes	46
3.1.3. Propriétés algébriques des suites convergentes	48
3.1.4. Exemples élémentaires de suites	54
<b>3.2.</b> Monotonie	59
3.2.1. Suites réelles monotones	59
3.2.2. Suites adjacentes	62
<b>3.3.</b> Suites extraites	65
<b>3.4.</b> Quelques types usuels de suites	68
3.4.1. Suites récurrentes affines du 1 <sup>er</sup> ordre à coefficients constants	68
3.4.2. Suites récurrentes linéaires du 2 <sup>e</sup> ordre à coefficients constants	68
3.4.3. Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$	72
Compléments	78

## Chapitre 4. – Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle

83

<b>4.1.</b> Algèbre des fonctions	83
4.1.1. Algèbre $\mathbb{K}^X$	83
4.1.2. Relation d'ordre dans $\mathbb{R}^X$	86
4.1.3. Parité	88
4.1.4. Périodicité	89
4.1.5. Applications en escalier sur un segment	91
4.1.6. Applications polynomiales, applications rationnelles	92
4.1.7. Monotonie	92
4.1.8. Applications majorées, minorées, bornées	94
<b>4.2.</b> Limites	97
4.2.1. Notion de limite	97
4.2.2. Ordre et limite	100
4.2.3. Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite	102
4.2.4. Cas des fonctions monotones	106

<b>4.3.</b>	<b>Continuité</b>	<b>109</b>
4.3.1.	Définitions	109
4.3.2.	Opérations algébriques sur les applications continues	111
4.3.3.	Continuité sur un intervalle	114
4.3.4.	Continuité sur un segment	116
4.3.5.	Application réciproque	118
4.3.6.	Continuité uniforme	121
4.3.7.	Applications lipschitziennes	123
<b>Chapitre 5.</b>	<b>– Dérivation</b>	<b>125</b>
<b>5.1.</b>	<b>Dérivées</b>	<b>125</b>
5.1.1.	Dérivée en un point	125
5.1.2.	Propriétés algébriques des fonctions dérivables en un point	128
5.1.3.	Application dérivée	132
5.1.4.	Dérivées successives	135
5.1.5.	Classe d'une fonction	138
5.1.6.	Différentielle	141
<b>5.2.</b>	<b>Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis</b>	<b>142</b>
5.2.1.	Théorème de Rolle	142
5.2.2.	Théorème des accroissements finis	143
<b>5.3.</b>	<b>Variations des fonctions</b>	<b>147</b>
5.3.1.	Etude de la monotonie pour une fonction dérivable	147
5.3.2.	Etude des extremums pour une fonction dérivable	151
<b>5.4.</b>	<b>Fonctions convexes</b>	<b>154</b>
5.4.1.	Définition	154
5.4.2.	Utilisation de dérivées dans l'étude de la convexité	158
5.4.3.	Inégalités de convexité	160
<b>Chapitre 6.</b>	<b>– Intégration</b>	<b>163</b>
<b>6.1.</b>	<b>Intégration des applications en escalier sur un segment</b>	<b>163</b>
6.1.1.	Algèbre des applications en escalier sur un segment	163
6.1.2.	Intégrale d'une application en escalier sur un segment	165
<b>6.2.</b>	<b>Intégration des applications continues par morceaux sur un segment</b>	<b>168</b>
6.2.1.	Algèbre des applications continues par morceaux sur un segment	168
6.2.2.	Approximation d'une application continue par morceaux sur un segment par des applications en escalier	169
6.2.3.	Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment	170
6.3.4.	Propriétés algébriques	172

6.3.5.	Propriétés relatives à l'ordre	174
6.3.6.	Relation de Chasles	178
6.3.7.	Sommes de Riemann	180
<b>6.3</b>	<b>Extension aux fonctions à valeurs complexes</b>	<b>183</b>
<b>6.4.</b>	<b>Intégration et dérivation</b>	<b>185</b>
6.4.1.	Intégrale fonction de la borne d'en haut	185
6.4.2.	Primitives	188
6.4.3.	Changement de variable	190 x
6.4.4.	Intégration par parties	191 x
6.4.5.	Formule de Taylor avec reste intégral	193
6.4.6.	Approximation d'une intégrale, méthode des rectangles, méthode des trapèzes	195

**Deuxième partie**  
**Indications et réponses des exercices**

Chap. 1, 203; Chap. 2, 221; Chap. 3, 233; Chap. 4, 255; Chap. 5, 263;  
Chap. 6, 279.

Index des notations	293
Index alphabétique	295

# Table des matières du tome 2

## Première partie – Cours

Chapitre 7. – Fonctions usuelles	3
<b>7.1.</b> Logarithme népérien	3
<b>7.2.</b> Exponentielle	5
<b>7.3.</b> Logarithmes et exponentielles de base $a$	6
7.3.1. Logarithme de base $a$	6
7.3.2. Exponentielle de base $a$	8
<b>7.4.</b> Puissances	10
<b>7.5.</b> Comparaison locale des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles	12
<b>7.6.</b> Fonctions hyperboliques directes	13
<b>7.7.</b> Supplément : fonctions hyperboliques réciproques	17
7.7.1. Argsh	17
7.7.2. Argch	18
7.7.3. Argth	19
7.7.4. Argcoth	20
<b>7.8.</b> Fonctions circulaires directes	22
<b>7.9.</b> Fonctions circulaires réciproques	27
7.9.1. Arcsin	27
7.9.2. Arccos	28
7.9.3. Arctan	29
<b>7.10</b> Exponentielle complexe	33
Compléments	36
Chapitre 8. – Comparaison locale des fonctions	39
<b>8.1.</b> Prépondérance, domination	39
8.1.1. Définitions	39
8.1.2. Opérations relatives à la prépondérance et à la domination	41
8.1.3. Exemples usuels	43
<b>8.2.</b> Equivalence	44
8.2.1. Définition	44
8.2.2. Opérations relatives à l'équivalence	46

8.2.3.	Equivalents usuels	48
8.2.4.	Exemples d'utilisation d'équivalents	50
<b>8.3.</b>	<b>Développements limités</b>	<b>52</b>
8.3.1.	Généralités	52
8.3.2.	Le théorème de Taylor-Young	55
8.3.3.	Dérivation et primitivation pour un $DL(0)$	57
8.3.4.	Opérations sur les fonctions admettant un $DL_n(0)$	60
8.3.5.	Exemples d'utilisation de développements limités	67
<b>8.4.</b>	<b>Notion de développement asymptotique</b>	<b>70</b>
8.4.1.	Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^n$ , $n \in \mathbb{Z}$	70
8.4.2.	Développement asymptotique dans l'échelle des $x \mapsto x^\alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}$	71
8.4.3.	Exemples de développements asymptotiques utilisant des logarithmes ou des exponentielles	71
<b>8.5.</b>	<b>Etude pratique d'une fonction de <math>\mathbb{R}</math> dans <math>\mathbb{R}</math>, représentation graphique</b>	<b>74</b>

**Chapitre 9. – Calculs de primitives** 79

<b>9.1.</b>	<b>Préambule</b>	<b>79</b>
<b>9.2.</b>	<b>Changement de variable</b>	<b>81</b>
<b>9.3.</b>	<b>Primitivation par parties</b>	<b>83</b>
<b>9.4.</b>	<b>Liste des primitives usuelles</b>	<b>88</b>
<b>9.5.</b>	<b>Primitivation des fonctions rationnelles</b>	<b>90</b>
<b>9.6.</b>	<b>Primitivation de fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles</b>	<b>94</b>
9.6.1.	Fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$	94
9.6.2.	Fonctions rationnelles en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$	99
9.6.3.	Fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}$ , $\alpha \in \mathbb{C}^*$	100
9.6.4.	Fonctions rationnelles en $x$ et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	101
9.6.5.	Fonctions rationnelles en $x$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$	102

**Chapitre 10. – Intégration sur un intervalle quelconque** 107

<b>10.1.</b>	<b>Fonctions continues intégrables à valeurs réelles positives ou nulles</b>	<b>107</b>
10.1.1.	Définition	107
10.1.2.	Propriétés algébriques	110
10.1.3.	Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert	113

<b>10.2.</b>	Fonctions continues intégrables à valeurs complexes	120
10.2.1	Généralités	120
10.2.2	Propriétés	123
10.2.3	Intégrabilité sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert	126
<b>Chapitre 11. – Equations différentielles</b>		
<b>(1<sup>re</sup> étude)</b>		<b>135</b>
<b>11.1.</b>	Equations différentielles linéaires du premier ordre	<b>135</b>
11.1.1.	Généralités	<b>135</b>
11.1.2.	Résolution de l'équation sans second membre	<b>136</b>
11.1.3.	Résolution de l'équation avec second membre	<b>139</b>
<b>11.2.</b>	Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle-polynôme	<b>147</b>
11.2.1.	Généralités	<b>147</b>
11.2.2.	Résolution de l'équation sans second membre	<b>148</b>
11.2.3.	Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme	<b>151</b>
<b>11.3.</b>	Exemples d'études d'équations différentielles non linéaires du premier ordre	<b>156</b>
11.3.1.	Généralités	<b>156</b>
11.3.2.	Equations différentielles à variables séparables	<b>158</b>
11.3.3.	Equations homogènes	<b>159</b>
11.3.4.	Equations de Bernoulli	<b>162</b>
11.3.5.	Equations de Riccati	<b>163</b>
11.3.6.	Equations incomplètes en $x$	<b>164</b>
11.3.7.	Equations incomplètes en $y$	<b>165</b>
11.3.8.	Equations de Lagrange et de Clairaut	<b>166</b>
<b>Chapitre 12. – Notions sur les fonctions de deux variables réelles</b>		
		<b>169</b>
<b>12.1.</b>	Espace $\mathbb{R}^2$ , suites dans $\mathbb{R}^2$	<b>169</b>
12.1.1.	Espace $\mathbb{R}^2$	<b>169</b>
12.1.2.	Parties ouvertes, parties fermées	<b>173</b>
12.1.3.	Suites dans $\mathbb{R}^2$	<b>174</b>
<b>12.2.</b>	Limites, continuité	<b>177</b>
12.2.1.	Limites	<b>177</b>
12.2.2.	Continuité	<b>177</b>
12.2.3.	Continuité partielle	<b>181</b>
<b>12.3.</b>	Dérivées partielles premières	<b>184</b>
12.3.1.	Définitions	<b>184</b>
12.3.2.	Applications de classe $C^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$	<b>185</b>

<b>12.4.</b>	Dérivées partielles successives	<b>192</b>
12.4.1.	Généralités	<b>192</b>
12.4.2.	Applications de classe $C^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$	<b>193</b>
12.4.3.	Interversion des dérivations	<b>194</b>
<b>12.5.</b>	Extremums des fonctions numériques de deux variables réelles	<b>196</b>
12.5.1.	Définitions	<b>196</b>
12.5.2.	Etude à l'ordre 1	<b>197</b>
12.5.3.	Extremums globaux	<b>198</b>
<b>12.6.</b>	Fonctions implicites	<b>199</b>
12.6.1.	Le problème des fonctions implicites	<b>199</b>
12.6.2.	Cas de deux variables réelles liées par une relation	<b>200</b>
<b>12.7.</b>	Formes différentielles	<b>206</b>
12.7.1.	Définitions	<b>206</b>
12.7.2.	Formes différentielles exactes	<b>206</b>
12.7.3.	Formes différentielles fermées	<b>207</b>
12.7.4.	Plan d'étude d'une forme différentielle, exemples	<b>209</b>
12.7.5.	Application à certaines équations différentielles du premier ordre	<b>216</b>
<b>12.8.</b>	Analyse vectorielle	<b>218</b>
12.8.1.	Définitions	<b>218</b>
12.8.2.	Formules d'analyse vectorielle	<b>219</b>
12.8.3.	Potentiel scalaire	<b>219</b>
<b>Chapitre 13. – Compléments de calcul intégral (1<sup>re</sup> étude)</b>		<b>221</b>
<b>13.1.</b>	Intégrales curvilignes	<b>221</b>
13.1.1.	Arcs orientés, courbes orientées	<b>221</b>
13.1.2.	Définition de l'intégrale curviligne	<b>223</b>
13.1.3.	Propriétés algébriques de l'intégrale curviligne	<b>225</b>
13.1.4.	Intégrale curviligne et forme différentielle exacte	<b>229</b>
13.1.5.	Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée	<b>232</b>
13.1.6.	Calculs d'aires planes	<b>233</b>
<b>13.2.</b>	Intégrales doubles	<b>237</b>
13.2.1.	Parties quarrables de $\mathbb{R}^2$	<b>237</b>
13.2.2.	Définition de l'intégrale double	<b>241</b>
13.2.3.	Propriétés élémentaires de l'intégrale double	<b>244</b>
13.2.4.	Théorème de Fubini	<b>245</b>
13.2.5.	Changement de variables dans une intégrale double	<b>249</b>
13.2.6.	Formule de Green-Riemann	<b>253</b>

<b>13.3.</b>	Intégrales triples	<b>254</b>
13.3.1.	Parties cubables de $\mathbb{R}^3$	<b>254</b>
13.3.2.	Définition de l'intégrale triple	<b>254</b>
13.3.3.	Propriétés élémentaires de l'intégrale triple	<b>254</b>
13.3.4.	Théorème de Fubini	<b>255</b>
13.3.5.	Changement de variables dans une intégrale triple	<b>256</b>
<b>13.4.</b>	Masses, centres d'inertie, moments d'inertie	<b>259</b>
13.4.1.	Systèmes matériels	<b>259</b>
13.4.2.	Masse d'un système matériel	<b>259</b>
13.4.3.	Centre d'inertie d'un système matériel	<b>262</b>
13.4.4.	Moments d'inertie d'un système matériel	<b>266</b>

## **Deuxième partie**

### **Indications et réponses des exercices**

Chap. 7, **273**; Chap. 8, **293**; Chap. 9, **313**; Chap. 10, **325**; Chap. 11, **345**;  
Chap. 12, **357**; Chap. 13, **371** .

Index des notations	<b>391</b>
Index alphabétique	<b>393</b>

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familier, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1er cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

Accompagné d'exercices corrigés nombreux et variés couvrant tout le **nouveau programme**, il s'adresse à ceux qui souhaitent confronter les théories enseignées à leur pratique.

Le tome 1 contient l'étude des **nombre réels et complexes, les suites numériques et les fonctions numériques d'une variable réelle (continuité, dérivation, intégration)**, ce qui correspond à la première partie du programme de l'analyse en première année.

Le tome 2 contient l'étude des **fonctions usuelles, la comparaison locale, les primitives, fonctions intégrables, équations différentielles, fonctions de deux variables et les compléments de calcul intégral**, ce qui correspond à la deuxième partie de l'analyse en première année.

*Jean-Marie Monier* est professeur en classe de Spéciales au Lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon. Il est l'auteur, chez Dunod, de cinq recueils d'exercices résolus de mathématiques.

*J'intègre* c'est un objectif qui a donné son nom à une collection d'ouvrages pour les classes préparatoires aux grandes écoles.

Cette collection qui se décline pour les prépas commerciales, les prépas scientifiques et les langues comprend trois types de livres : des *manuels* pour l'acquisition des connaissances fondamentales, des livres *d'exercices et d'annales* régulièrement mis à jour pour la maîtrise des connaissances, et des séries de *QCM* pour l'évaluation et l'entraînement individuels.



Code 043061  
ISBN 2 10 003061 2

