

Manuels de Mathématiques

collection dirigée par Jacques MOISAN

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ANALYSE 1

Secondes années
PSI*, PSI, PC*, PC

Jean FRANCHINI

Jean-Claude JACQUENS



MANUELS
DE MATHÉMATIQUES

collection dirigée par Jacques MOISAN

M471/T1

CLASSES DE SECONDE ANNÉE
PSI*, PSI, PC*, PC

ANALYSE 1

Cours / Exercices corrigés / Travaux Dirigés

21846 $\frac{3}{5}$

Jean FRANCHINI
Jean-Claude JACQUENS



Agrégés de Mathématiques
Professeurs en classes préparatoires
de seconde année

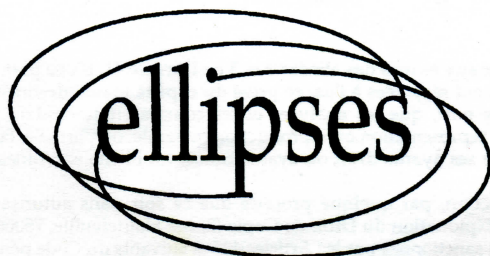


Table des matières

1. SÉRIES RÉELLES ET COMPLEXES	9
I. Généralités	9
A. Définitions	9
B. Exemples de base	10
C. Critère de Cauchy	11
D. Absolue convergence	12
E. Opérations	12
II. Séries à termes positifs	14
A. Généralités	14
B. Comparaison à une série à termes positifs	15
C. Développement décimal d'un réel	18
III. Séries alternées	18
A. Définition et théorème	18
B. Application	19
Exercices	21
Travaux dirigés	29
Cas douteux de d'Alembert	29
Critère de la loupe et séries de Bertrand	30
Application de la convergence au sens de Cesàro	31
Sommatation de relations de comparaison	32
2. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	35
I. Normes	35
A. Définitions	35
B. Exemples fondamentaux	36
C. Nature d'une suite	39
D. Applications lipschitziennes	40
E. Comparaison des normes	40
II. Cas de la dimension finie	42
A. Suites	42
B. Parties ouvertes, parties fermées	43
C. Limite, continuité	47
D. Compacité	51
E. Applications linéaires, bilinéaires	53



F. Séries de vecteurs	55
Exercices	57
Travaux dirigés	64
Un théorème du point fixe	64
Des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$	65
3. SUITES DE FONCTIONS	67
I. Convergence simple d'une suite de fonctions	67
II. Convergence uniforme d'une suite de fonctions	68
III. Propriétés de la limite d'une suite de fonctions	69
IV. Approximations de fonctions	72
Exercices	75
Travaux dirigés	80
Weierstrass et Bernstein	80
Une caractérisation de la fonction Gamma	81
Weierstrass (autre preuve)	83
4. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL	85
I. Dérivabilité	85
A. Définitions	85
B. Opérations	86
C. Dérivées d'ordre supérieur	88
D. Difféomorphismes	90
II. Définition de l'intégrale sur un segment	91
A. Cas des fonctions en escalier	91
B. Cas des fonctions continues par morceaux	93
III. Calcul différentiel, calcul intégral : le lien	98
A. Primitives	98
B. Accroissements finis	101
C. Calcul intégral	102
D. Formules de Taylor	106
E. Relèvement	108
IV. Intégrale dépendant d'un paramètre	109
A. Continuité	109
B. Dérivabilité	110
C. Intégration	111
Exercices	113
Travaux dirigés	123
Lemme de Riemann-Lebesgue	123

Point fixe stable	125
Etude d'une fonction définie par une intégrale	127
Théorèmes de l'Hôpital	129
Approximation polynomiale	130
Formule d'Euler Mac-Laurin	132
Sommes de valeurs d'une fonction en des points équidistants	136
Convolution	137

5. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE 139

I. Cas des fonctions positives 139

A. Intégrabilité 139

B. Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive 144

II. Cas des fonctions à valeurs complexes 146

A. Intégrabilité 146

B. Intégrale 147

C. Extension 150

D. Changement de variable 151

III. Espace vectoriel normé des fonctions intégrables 152

A. Normes 152

B. Convergence monotone 154

C. Convergence dominée 154

IV. Intégrales dépendant d'un paramètre 155

A. Continuité 155

B. Dérivabilité 156

⊗ Exercices 158

Travaux dirigés 170

Un problème d'approximation 170

Théorème des résidus pour les fonctions rationnelles 171

Transformation de Laplace 175

Application de la transformation de Laplace à un système différentiel 178

Unité approchée 179

Transformée de Fourier et classe de Schwartz 180

Formule de Stirling 183

Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt$ 184

Intégrale de Gauss 186

Etude d'une fonction définie par une intégrale 188

Intégration des relations de comparaison 190

INDEX 192

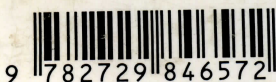
AGOR

La collection des Manuels de Mathématiques a pour ambition de donner aux étudiants des classes préparatoires scientifiques un outil d'apprentissage et d'approfondissement des Mathématiques enseignées dans le cadre de la préparation aux concours. L'étudiant a ainsi à portée de main une aide précieuse, tant pour l'apprentissage du cours que pour l'acquisition des méthodes et des techniques de résolution des exercices et des problèmes.

Ce livre est le premier des trois tomes d'un Manuel de Mathématiques écrit à l'intention des étudiants des classes préparatoires de seconde année PSI*, PSI, PC* et PC. Il est conforme au programme en vigueur à partir de septembre 1996.

Il s'efforce de respecter tant l'esprit que la lettre du programme qui a été rédigé de façon à la fois directive pour les enseignants et contraignante pour les examinateurs des concours.

Les deux premiers tomes sont consacrés à l'analyse et le troisième à l'algèbre.



ISBN 2-7298-4657-3