

374/6

Mathématiques pour DEUG

collection dirigée par Philippe PILIBOSSIAN

ANALYSE I

Suites numériques
Fonctions d'une variable réelle
Développements limités

Marie-Claude SARMANT
Thérèse MERLIER
Philippe PILIBOSSIAN
Sleiman YAMMINE



52/ Vol. 1

MATHÉMATIQUES POUR DEUG

collection dirigée par Philippe PILIBOSSIAN

DEUG SCIENCES



Vol. 1

Université "Paul Sabatier"
Faculté des Sciences
Bibliothèque Département T.C.T

ANALYSE I

Suites numériques
Fonctions d'une variable réelle
Développements limités

Cours et exercices corrigés

Marie-Claude SARMANT

Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand

Thérèse MERLIER

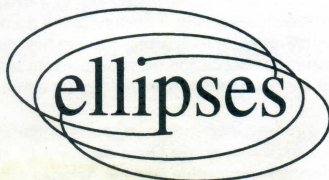
Maître de conférences à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Philippe PILIBOSSIAN

Maître de conférences à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Sleiman YAMMINE

Maître de conférences à l'Université Pierre et Marie Curie



N° d'inventaire: 374... 6/10

N° de Côte:

Table des matières

Avant-propos	iii
Notations mathématiques	viii
Alphabet grec	x
Chapitre I. LE CORPS DES RÉELS	1
1 Nécessité de la construction du corps des nombres réels	1
1.1 Ensembles ordonnés	1
1.2 Introduction des réels	2
2 Propriétés caractéristiques de \mathbb{R}	4
2.1 Densité de \mathbb{Q} et de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R}	4
2.2 Partie entière d'un réel	5
2.3 Valeur absolue et distance sur \mathbb{R}	5
3 Ensembles particuliers de réels	6
3.1 Intervalles bornés de \mathbb{R}	6
3.2 Droite numérique achevée	7
3.3 Intervalles non bornés de \mathbb{R}	8
3.4 Parties symétriques et adjacentes	9
4 Exercices	10
5 Solutions	12
Chapitre II. SUITES NUMÉRIQUES	16
1 Notion de suite	16
1.1 Définitions	16
1.2 Suites constante, stationnaire, arithmétique, géométrique, récurrente	16
2 Convergence, limite d'une suite	17
3 Opérations sur les suites	19
3.1 Opérations algébriques et convergence	19
3.2 Comparabilité et convergence	20
3.3 Suites extraites	21
4 Étude de la convergence des suites	22
4.1 Suites monotones, majorées, minorées et bornées	22
4.2 Suites minorées, majorées, bornées et convergence	22
4.3 Suites adjacentes	23
4.4 Exemple d'étude de la convergence d'une suite	24
5 Suites divergentes, limites infinies	24
5.1 Monotonie et divergence	24
5.2 Opérations algébriques et limites infinies	25
5.3 Nature d'une suite	26
6 Suites arithmétiques et géométriques	26
7 Exercices	28
8 Solutions	31

Chapitre III. LIMITES DES FONCTIONS	37
1 Fonction réelle d'une variable réelle	37
1.1 Généralités. Rappels et préliminaires	37
1.2 Fonctions monotones, paires, impaires, périodiques	38
2 Limite d'une fonction	39
2.1 Cas général	39
2.2 Cas particuliers	41
2.3 Limites à droite et à gauche en un point	42
2.4 Limites par valeurs inférieures et supérieures	44
3 Propriétés des limites	44
3.1 Opérations algébriques et limites	44
3.2 Formes indéterminées	46
3.3 Comparabilité, monotonie et limites	47
4 Fonctions équivalentes	49
5 Comparaison des fonctions	52
6 Branches infinies d'une courbe représentative	52
7 Exercices	54
8 Solutions	57
Chapitre IV. CONTINUITÉ DES FONCTIONS	64
1 Généralités	64
1.1 Continuité en un point	64
1.2 Continuité à droite et à gauche en un point	65
1.3 Prolongement par continuité	66
1.4 Propriétés de la continuité en un point	66
2 Fonctions continues sur des intervalles	67
2.1 Propriétés des valeurs intermédiaires	67
2.2 Fonctions continues injectives et monotones	69
2.3 Points fixes et suites itératives.	70
3 Exercices	73
4 Solutions	75
Chapitre V. DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS	80
1 Généralités	80
1.1 Dérivabilité ou différentiabilité en un point	80
1.2 Dérivabilité à droite et à gauche en un point	81
1.3 Opérations sur les fonctions et dérivabilité	83
1.4 Interprétation géométrique de la dérivabilité. Concavité	85
1.5 Extrema locaux et dérivabilité	87
1.6 Dérivées successives	88
2 Théorèmes de Rolle, Taylor et Maclaurin	90
2.1 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	90
2.2 Formules de Taylor, Maclaurin et Taylor-Young	91
3 Applications	94
3.1 Points fixes et suites itératives	94
3.2 Dérivées et monotonie	94
3.3 Étude locale d'une fonction. Concavité	96
3.4 Prolongement de la dérivée	96
4 Exercices	97
5 Solutions	102

Chapitre VI. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS	113
1 Développements limités au voisinage de zéro	113
2 Opérations sur les développements limités au voisinage de zéro	116
3 Extension de la notion de développement limité	120
3.1 Développement limité à droite ou à gauche de zéro	120
3.2 Développement limité au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}^*$	120
3.3 Développements limités généralisés au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$	122
4 Exercices	123
5 Solutions	125
ANNEXES	131
Chapitre VII. FONCTIONS USUELLES	133
1 Fonctions trigonométriques circulaires	133
1.1 Fonctions sinus et Arcsinus	133
1.2 Fonctions cosinus et Arccosinus	133
1.3 Fonctions tangente et Arctangente	134
1.4 Quelques relations remarquables	134
2 Fonctions puissances d'exposant rationnel	135
2.1 Puissances entières d'un réel	135
2.2 Puissances rationnelles d'un réel positif	136
3 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances	136
3.1 Fonctions logarithme népérien et exponentielle	136
3.2 Notation exponentielle. Puissances réelles ^{+ positive} d'un réel positif	137
3.3 Fonctions logarithme et exponentielle de base a	138
3.4 Fonctions puissances d'exposant réel	138
4 Fonctions trigonométriques hyperboliques	139
4.1 Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques	139
4.2 Fonctions hyperboliques et leurs arguments	139
5 Fonction homographique	141
6 Formulaire des fonctions usuelles et de leurs dérivées	142
Chapitre VIII. PRIMITIVES	143
1 Définition et propriétés	143
2 Formulaire des primitives des fonctions usuelles	145
INDEX	147

Dans la même collection

- ◆ *Algèbre 1. Ensembles fondamentaux • Arithmétique • Polynômes*, par Gilles CHRISTOL, Philippe PILIBOSSIAN et Sleiman YAMMINE, 128 pages, 75 francs.
- ◆ *Algèbre 2. Espaces vectoriels • Matrices • Systèmes linéaires*, par Gilles CHRISTOL, Philippe PILIBOSSIAN et Sleiman YAMMINE, 160 pages, 95 francs.
- ◆ *Analyse 3. Séries numériques • Suites et séries de fonctions • Intégrales*, par Claude SERVIEN, 128 pages, 75 francs.
- ◆ *Analyse 4. Séries de Fourier • Séries entières • Intégrales multiples*, par Claude SERVIEN, 128 pages, 75 francs.

Cette collection est un ensemble de manuels de Mathématiques destinés aux étudiants en DEUG-Sciences. Chaque volume comprend le cours sous la forme la plus dépouillée — tout en gardant la rigueur mathématique —, des exercices en application du cours et leurs solutions détaillées, fruit de plusieurs années d'expérience d'enseignement en premier cycle.

Ainsi, l'étudiant peut travailler seul en s'entraînant à la résolution des exercices en complétant ses notes de cours.

Le présent livre, *Analyse*, est destiné aux étudiants de premier niveau du DEUG-Sciences (MIAS, SM). Dans le premier chapitre on trouvera une présentation rapide des *nombre réels*. Le deuxième contient les *suites numériques*. Les chapitres suivants traitent respectivement les *limites*, la *continuité* et la *dérivabilité des fonctions d'une variable réelle*. Le sixième est consacré aux *développements limités*. Les auteurs ont ajouté, en annexe, les *fonctions usuelles* et les *primitives*, supposées connues par les étudiants et qui ne sont pas toujours traités en détail. Le cours est présenté dans sa version la plus utile pour la résolution des exercices et problèmes qui figurent à la fin de chaque chapitre.

