

Manuels de Mathématiques

---

MATHÉMATIQUES  
SPÉCIALES

ANALYSE 2

Secondes années

MP, MP\*

---

Jean FRANCHINI

Jean-Claude JACQUENS



MANUELS  
DE MATHÉMATIQUES

11449 T2

CLASSES DE SECONDE ANNÉE  
MP et MP\*

# ANALYSE 2

Cours / Exercices corrigés / Travaux Dirigés



4/20

Jean FRANCHINI  
Jean-Claude JACQUENS

Agrégés de Mathématiques  
Professeurs en classes préparatoires  
de seconde année



# Table des matières

<b>1. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE</b>	<b>9</b>
<b>I. Complément au programme de première année</b>	<b>9</b>
A. La fonction Gamma	9
B. Extension de l'intégrale	10
C. Changement de variable	11
D. Application à l'étude des séries	11
E. Intégration des relations de comparaison	12
<b>II. Espace vectoriels normés de fonctions intégrables</b>	<b>13</b>
A. Normes	13
B. Convergence monotone	14
C. Convergence dominée	17
<b>III. Intégrales dépendant d'un paramètre</b>	<b>19</b>
A. Continuité	19
B. Dérivabilité	20
C. Étude de la fonction $\Gamma$	21
<b>Exercices</b>	<b>23</b>
<b>Travaux dirigés</b>	<b>42</b>
Fonction définie par une intégrale	42
Convolution et régularisation	44
Transformation de Fourier	48
Transformation de Laplace	52
Méthode de Laplace ; application à la formule de Stirling	56
Calcul d'une intégrale	58
Formule des compléments	63
Développements asymptotiques de fonctions définies par une intégrale	65
<b>2. SÉRIES ENTIÈRES</b>	<b>71</b>
<b>I. Rayon de convergence</b>	<b>71</b>
A. Définitions	71
B. Détermination du rayon	72
<b>II. Propriétés de la somme</b>	<b>75</b>
A. Continuité	75
B. Intégration	76
C. Dérivabilité	77

<b>III. Fonctions développables en série entière</b>	<b>77</b>
A. Définitions	77
B. Séries de Taylor	78
C. Développements classiques	79
<b>IV. Fonctions circulaires (MP*)</b>	<b>81</b>
A. Définitions ; premières propriétés	81
B. Définition de $\pi$ ; conséquences	82
C. Variations des fonctions circulaires sur $\mathbb{R}$	84
<b>Exercices</b>	<b>84</b>
<b>Travaux dirigés</b>	<b>102</b>
Théorème de Bernstein	102
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	104
Une équation fonctionnelle	108
Un théorème de Hardy Littlewood	113
Inégalités de Cauchy ; applications	119
<b>3. ANALYSE HILBERTIENNE</b>	<b>123</b>
<b>I. Structure préhilbertienne complexe</b>	<b>123</b>
A. Produit scalaire	123
B. Orthogonalité	126
C. Projection orthogonale	129
<b>II. Séries de Fourier</b>	<b>131</b>
A. Structure préhilbertienne et extension	131
B. Coefficients de Fourier	132
C. Extension de l'inégalité de Bessel	133
D. Autres périodes	134
<b>III. Problèmes de convergence</b>	<b>135</b>
A. Convergence en moyenne quadratique	135
B. Convergence ponctuelle	136
<b>Exercices</b>	<b>139</b>
<b>Travaux dirigés</b>	<b>154</b>
Inégalité isopérimétrique	154
Polynômes de Bernoulli	156
Inversibilité dans une sous-algèbre de $\mathcal{C}_{2\pi}$	160
Méthode de Jackson	164
Théorème de Bochner	169
Formule sommatoire	177
<b>4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>	<b>184</b>
<b>I. Équations différentielles linéaires</b>	<b>184</b>
A. Généralités	184

B. Équations linéaires scalaires d'ordre 1 . . . . .	184
C. Équations linéaires du premier ordre . . . . .	187
D. Équations scalaires d'ordre 2 . . . . .	193
<b>II. Équations différentielles non linéaires . . . . .</b>	<b>196</b>
A. Systèmes autonomes dans une partie ouverte de $\mathbf{R}^2$ . . . . .	196
B. Équations non autonomes . . . . .	199
C. Équations autonomes sur un intervalle de $\mathbf{R}$ . . . . .	201
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>203</b>
<b>Travaux dirigés . . . . .</b>	<b>219</b>
Théorème de Cauchy-Lipschitz : une preuve . . . . .	219
Solutions pseudo-périodiques d'une équation différentielle . . . . .	222
Fonctions oscillantes . . . . .	227
Lemme de Gronwall ; applications . . . . .	232
Position d'équilibre d'une équation autonome . . . . .	236
Équation différentielle de Bessel . . . . .	239
Une équation de Riccati (MP*) . . . . .	243
<b>5. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES . . . . .</b>	<b>247</b>
<b>I. Calcul différentiel . . . . .</b>	<b>247</b>
A. Généralités . . . . .	247
B. Opérations sur l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	250
C. Algèbre $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{K})$ . . . . .	253
D. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$ . . . . .	256
<b>II. Complément de calcul intégral . . . . .</b>	<b>259</b>
A. Champs de vecteurs, de scalaires . . . . .	259
B. Intégrale curviligne . . . . .	261
C. Intégrales doubles . . . . .	262
<b>III. Courbes planes et surfaces . . . . .</b>	<b>264</b>
A. Courbes planes . . . . .	264
B. Surfaces . . . . .	266
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>268</b>
<b>Travaux dirigés . . . . .</b>	<b>280</b>
Endomorphismes conservant un opérateur différentiel . . . . .	280
Une équation aux dérivées partielles . . . . .	284
<b>INDEX . . . . .</b>	<b>288</b>

---

*La collection des Manuels de Mathématiques a pour ambition de donner aux étudiants des classes préparatoires scientifiques un outil d'apprentissage et d'approfondissement des Mathématiques enseignées dans le cadre de la préparation aux concours. L'étudiant a ainsi à portée de main une aide précieuse, tant pour l'apprentissage du cours que pour l'acquisition des méthodes et des techniques de résolution des exercices et des problèmes.*

Ce livre est le deuxième des trois tomes d'un *Manuel de Mathématiques* écrit à l'intention des étudiants des classes préparatoires de seconde année MP et MP\*. Il est conforme au programme en vigueur depuis septembre 1996.

Il s'efforce de respecter tant l'esprit que la lettre du programme qui a été rédigé de façon à la fois directive pour les enseignants et contraignante pour les examinateurs des concours.

Les deux premiers tomes sont consacrés à l'analyse et le troisième à l'algèbre.

---