

Manuels de Mathématiques

---

collection dirigée par Jacques MOISAN

# MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

# ALGÈBRE

Secondes années  
PSI\*, PSI, PC\*, PC

---

Jean FRANCHINI

Jean-Claude JACQUENS

ellipses

M443

MANUELS  
DE MATHÉMATIQUES

collection dirigée par Jacques MOISAN

CLASSES DE SECONDE ANNÉE  
PSI\*, PSI, PC\*, PC

ALGÈBRE

Cours / Exercices corrigés / Travaux Dirigés

Jean FRANCHINI  
Jean-Claude JACQUENS

Agrégés de Mathématiques  
Professeurs en classes préparatoires  
de seconde année

21808 1/10

M443



# Table des matières

<b>1. ESPACES VECTORIELS</b>	<b>9</b>
<b>I. Sommes directes</b>	<b>9</b>
A. Somme	9
B. Définition de la somme directe et premières propriétés	10
C. Décomposition de $E$ en somme directe	11
<b>II. Applications linéaires</b>	<b>13</b>
A. Théorème fondamental	13
B. Dualité	15
C. Trace	17
<b>Exercices</b>	<b>19</b>
<b>Travaux dirigés</b>	<b>33</b>
Noyaux itérés	33
Autour des involutions	36
Matrice à diagonale strictement dominante	37
Génération de $SL_2(\mathbf{Z})$	38
Inverse généralisée	39
Commutateurs	41
Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$	43
Fonctions de deux variables	46
<b>2. DÉTERMINANTS</b>	<b>51</b>
<b>I. Groupe symétrique</b>	<b>51</b>
A. Définition et structure	51
B. Signature	52
<b>II. Applications multilinéaires</b>	<b>53</b>
A. Applications bilinéaires	53
B. Applications $n$ -linéaires	54
<b>III. Déterminant de <math>n</math> vecteurs</b>	<b>56</b>
<b>IV. Déterminant d'un endomorphisme</b>	<b>58</b>
<b>V. Déterminant d'une matrice carrée</b>	<b>59</b>
A. Définition et propriétés	59
B. Calcul	60

<b>VI. Applications des déterminants</b>	<b>63</b>
A. Calcul de l'inverse d'une matrice	63
B. Orientation d'un espace vectoriel réel	63
C. Caractérisation d'une famille libre	64
C. Résolution de systèmes linéaires	65
<b>Exercices</b>	<b>67</b>
<b>Travaux dirigés</b>	<b>77</b>
Formule de Sylvester et déterminant de Hankel	77
Quelques propriétés de la comatrice	81
<b>3. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES</b>	<b>83</b>
<b>I. Sous-espaces vectoriels stables</b>	<b>83</b>
A. Définitions	83
B. Décomposition en somme directe	84
C. Drapeau	84
<b>II. Polynômes d'endomorphisme</b>	<b>85</b>
A. Généralités	85
B. Théorème de décomposition des noyaux	87
<b>III. Éléments propres</b>	<b>90</b>
A. Cas d'un endomorphisme	90
B. Cas d'une matrice	93
C. Polynôme caractéristique	94
<b>IV. Réduction en dimension finie</b>	<b>97</b>
A. Diagonalisation	97
B. Trigonalisation	102
<b>Exercices</b>	<b>104</b>
<b>Travaux dirigés</b>	<b>117</b>
Convergence de $(A^m)$	117
Projecteurs spectraux	118
Commutant et racines carrées d'une matrice diagonalisable	119
Problème de Dirichlet discret	121
Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ conservant le rang	124
Pseudo-réflexions et polynômes réciproques	128

<b>4. ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS</b> . . . . .	<b>132</b>
<b>I. Structure préhilbertienne réelle</b> . . . . .	<b>132</b>
A. Produit scalaire . . . . .	132
B. Orthogonalité . . . . .	135
C. Projection orthogonale . . . . .	139
<b>II. Espaces Euclidiens</b> . . . . .	<b>141</b>
A. Expressions analytiques . . . . .	141
B. Isomorphisme canonique . . . . .	142
C. Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	143
D. Automorphismes orthogonaux . . . . .	147
E. Endomorphismes autoadjoints . . . . .	149
<b>Exercices</b> . . . . .	<b>152</b>
<b>Travaux dirigés</b> . . . . .	<b>164</b>
Caractérisation des espaces euclidiens . . . . .	164
Matrices symétriques positives . . . . .	166
Polynômes orthogonaux ; généralités . . . . .	171
Polynômes de Legendre . . . . .	174
Polynômes de Tchebychev de première espèce . . . . .	177
Déterminant de Gram . . . . .	178
Théorème de Courant-Fischer ; inégalités de Weyl . . . . .	182
Résolution approchée d'équations ; pseudo-solution . . . . .	185
 <b>INDEX</b> . . . . .	 <b>192</b>

---

*La collection des Manuels de Mathématiques a pour ambition de donner aux étudiants des classes préparatoires scientifiques un outil d'apprentissage et d'approfondissement des Mathématiques enseignées dans le cadre de la préparation aux concours. L'étudiant a ainsi à portée de main une aide précieuse, tant pour l'apprentissage du cours que pour l'acquisition des méthodes et des techniques de résolution des exercices et des problèmes.*

Ce livre est le dernier des trois tomes d'un Manuel de Mathématiques écrit à l'intention des étudiants des classes préparatoires de seconde année PSI\*, PSI, PC\* et PC. Il est conforme au programme en vigueur à partir de septembre 1996.

Il s'efforce de respecter tant l'esprit que la lettre du programme qui a été rédigé de façon à la fois directive pour les enseignants et contraignante pour les examinateurs des concours.

Les deux premiers tomes sont consacrés à l'analyse et le troisième à l'algèbre.

---

