

**J. Lelong-Ferrand
J. M. Arnaudiès**

Cours de mathématiques

Tome 4

**Equations différentielles,
intégrales multiples**

2^e édition

Dunod Université

**J. Lelong-Ferrand
J. M. Arnaudiès**

Cours de mathématiques

Tome 4

**Equations différentielles,
intégrales multiples**

2^e édition

Dunod Université

743

Cours de mathématiques

Tome 4

Equations différentielles, intégrales multiples

J. LELONG-FERRAND

Professeur à l'Université
P. et M. Curie, Paris

J.M. ARNAUDIÈS

Professeur de mathématiques spéciales
au Lycée Pierre de Fermat, Toulouse.

Anciens élèves de l'École Normale Supérieure

1385



Dunod

Table des matières

CHAPITRE I. Equations différentielles. Généralités, cas linéaire	1
§ 1 Systèmes différentiels. Forme normale	2
§ 2 Equations différentielles vectorielles ; problème de Cauchy	5
§ 3 Equations différentielles linéaires. Généralités	7
§ 4 Théorème de Cauchy (cas des équations linéaires)	11
§ 5 Equations différentielles scalaires linéaires du premier ordre. Etude directe	15
§ 6 Equations et systèmes homogènes	22
§ 7 Méthode de variation des constantes	27
§ 8 Equations différentielles linéaires du second ordre	30
§ 9 Equations scalaires d'ordre quelconque	38
§ 10 Intégration par développement en série	43
§ 11 Equations du type de Fuchs	48
CHAPITRE II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants	56
§ 1 Principes généraux	56
§ 2 Cas où E est de dimension finie	60
§ 3 Exemples de systèmes homogènes	63
§ 4 Systèmes non homogènes	70
§ 5 Utilisation d'un changement de base	75
§ 6 Cas d'une équation scalaire d'ordre n à coefficients constants	81
§ 7 Equations d'Euler	88
§ 8 Calcul symbolique	90
CHAPITRE III. Equations différentielles non linéaires. Exemples et applications	97
§ 1 Théorème de Cauchy-Lipschitz	97
§ 2 Résultats pratiques	104
§ 3 Cas d'une équation non résolue par rapport aux dérivées	106
§ 4 Cas élémentaires. Etude locale	110
§ 5 Equations de la forme $y'' = f(y)$	116
§ 6 Equations de Bernoulli et de Riccati	126
§ 7 Courbes intégrales. Point de vue géométrique	130
§ 8 Equations de la forme $f(x, y') = 0$ ou $f(y, y') = 0$	134
§ 9 Equations homogènes	138
§ 10 Equations de Lagrange et de Clairaut	147
§ 11 Trajectoires d'un champ de vecteurs	154
§ 12 Exemples de trajectoires	161
§ 13 Trajectoires orthogonales	167

VIII *Table des matières*

CHAPITRE IV. Intégrales multiples. Définitions. Propriétés générales	172
§ 1 Fonctions en escalier sur un pavé de \mathbb{R}^n	173
§ 2 Intégrale des fonctions en escalier	175
§ 3 Intégration sur un pavé	179
§ 4 Intégration sur un ensemble borné	183
§ 5 Conditions d'intégrabilité	185
§ 6 Propriétés de l'intégrale	188
§ 7 Ensembles quarrables. Mesure	192
§ 8 Propriétés de la mesure	195
§ 9 Sommes de Riemann	199
§ 10 Sommes de Darboux	203
CHAPITRE V. Calcul des intégrales multiples	205
§ 1 Intégration sur un produit de pavés	205
§ 2 Applications	209
§ 3 Calcul des intégrales doubles	212
§ 4 Intégrales triples. Calcul des volumes	215
§ 5 Changement de variables	219
§ 6 Exemples de changement de variables	225
§ 7 Quelques exemples de calcul d'aires et de volumes	229
§ 8 Aire des surfaces	233
§ 9 Intégrales généralisées	241
§ 10 Un exemple d'intégrale généralisée; comparaison avec une série double	244
§ 11 Exemples d'intégrales généralisées sur des ensembles bornés	250
§ 12 Intégrales multiples dépendant d'un paramètre	255
CHAPITRE VI. Formes différentielles. Intégrales curvilignes. Intégrales de surface	258
§ 1 Formes différentielles de degré un	259
§ 2 Intégrales curvilignes	262
§ 3 Formule de Riemann-Green	269
§ 4 Application : Formule du changement de variables pour les intégrales doubles	275
§ 5 Eléments d'algèbre extérieure	277
§ 6 Formes différentielles de degré p	284
§ 7 Intégration des formes différentielles	291
§ 8 Intégrales de surface; interprétation géométrique	295
§ 9 Formule d'Ostrogradski	301
§ 10 Formule de Stokes	308
§ 11 Le problème des primitives	314
CHAPITRE VII. Masses, centres et moments d'inertie des systèmes matériels ..	321
§ 1 Notion de mesure positive sur un compact	321
§ 2 Systèmes matériels. Masses	324
§ 3 Centres de gravité (ou d'inertie)	326
§ 4 Propriétés des centres d'inertie	329
§ 5 Théorèmes de Guldin	334

§ 6	Moments d'inertie	336
§ 7	Relations entre les moments d'inertie	339
§ 8	Tenseur et matrices d'inertie	342
 CHAPITRE VIII. Fonctions holomorphes ; calcul des résidus		349
§ 1	Définitions. Exemples	349
§ 2	Différentiabilité. Formules de Cauchy	352
§ 3	Première formule de Cauchy	357
§ 4	Propriétés des intégrales curvilignes de fonctions complexes	358
§ 5	Théorème de d'Alembert	361
§ 6	Deuxième formule de Cauchy	362
§ 7	Développement en série entière	364
§ 8	Analyticité des fonctions holomorphes	370
§ 9	Résidus	373
§ 10	La formule des résidus	378
§ 11	Calcul d'intégrales par la méthode des résidus	381
§ 12	Autres exemples	386
§ 13	Autres exemples	390
§ 14	Exemples d'intégrales de fonctions non uniformes	393
 EXERCICES		399
 BIBLIOGRAPHIE		452
 INDEX ALPHABÉTIQUE		453

J. Lelong-Ferrand J. M. Arnaudiès

Cours de mathématiques - Tome 4
Equations différentielles,
intégrales multiples

Ce tome 4 du « Cours de mathématiques » de J. LELONG-FERRAND et J. M. ARNAUDIES est consacré à d'importants compléments d'Analyse : les équations différentielles, les intégrales multiples et leurs applications, les fonctions holomorphes.

Ce livre est d'abord un *outil de travail* pour les élèves des classes préparatoires aux Grandes Ecoles et les étudiants de 1^{er} cycle des Universités scientifiques : les uns y trouveront les méthodes modernes et efficaces qui leur permettront de faire face aux exigences actuelles des grands concours ; les autres seront en possession d'un traité de base clair et rigoureux, les préparant directement à la Maîtrise, et ils s'y reporteront avec plaisir tout au long de leurs études.

C'est aussi un *ouvrage de référence* pour tous ceux qui veulent approfondir ou compléter leurs connaissances tout en se familiarisant avec les méthodes d'aujourd'hui.

Ce volume rendra service aux étudiants qui veulent apprendre à manier correctement les outils mathématiques et en comprendre le fonctionnement : ils y trouveront à la fois la matière d'un livre de cours et celle d'un livre d'exercices. A ce titre, il pourra aider les candidats à l'agrégation et les professeurs de lycée qui veulent garder le contact avec l'Université.



9 782040 026066



ISBN 2-04-02606-1