

LELONG-FERRAND ARNAUDIÈS

Cours de mathématiques

3. géométrie
et cinématique



LES COURS DE RÉFÉRENCE

2^e édition

DUNOD

M43/T3

LELONG-FERRAND/ARNAUDIÈS

Cours de mathématiques

3. géométrie et cinématique

Jacqueline Lelong-Ferrand

Professeur à l'université Pierre et Marie Curie, Paris 6

Jean-Marie Arnaudiès

Professeur de mathématiques spéciales au lycée Pierre de Fermat, Toulouse

Tous deux sont anciens élèves de l'École normale supérieure

29230 2/3



2^e édition

DUNOD

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. Géométrie affine	1
§ 1 Compléments de géométrie vectorielle	1
§ 2 Projecteurs, homothéties, dilatations et transvections (cas vectoriel)	5
§ 3 Espaces affines	11
§ 4 Applications affines. Groupe affine	15
§ 5 Structures vectorielles sur un espace affine	19
§ 6 Sous-variétés affines. Sous-espaces affines	21
§ 7 Fonctions affines ; équations d'une variété affine	27
§ 8 Barycentres	31
§ 9 Coordonnées barycentriques	37
§ 10 Quelques transformations affines particulières	41
§ 11 Convexité	46
§ 12 Repères. Orientation des espaces affines de dimension finie	52
§ 13 Droites en dimension 2	57
§ 14 Plans d'un espace affine de dimension 3	61
CHAPITRE II. Notions de géométrie euclidienne	68
§ 1 Espaces affines attachés à un e.v.n. Cas euclidien	68
§ 2 Orthogonalité. Notion élémentaire d'angle	71
§ 3 Cas du plan. Angles orientés	77
§ 4 Coordonnées polaires	83
§ 5 Coordonnées cylindriques et sphériques	86
§ 6 Droites du plan euclidien	90
§ 7 Gerbe de droites définie par une équation homogène du second degré (dans le plan)	95
§ 8 Droites et plans en dimension 3	99
§ 9 Plans définis par une équation homogène du second degré	106
§ 10 Isométries et déplacements. Décomposition canonique	109
§ 11 Structure des isométries ; points fixes	114
§ 12 Générateurs des groupes Is (\mathcal{E}_n) et Dep (\mathcal{E}_n)	121
§ 13 Similitudes. Inversions	126
CHAPITRE III. Etude élémentaire de quelques ensembles	132
§ 1 Cercles du plan euclidien	133
§ 2 Points conjugués par rapport à un cercle	140
§ 3 Axes radicaux. Faisceaux de cercles	142

VIII *Table des matières*

§ 4	Equations polaires et cartésiennes des coniques	147
§ 5	Cylindres, cônes et conoïdes	154
§ 6	Sphères (en dimension 3)	161
§ 7	Quadriques à centre	167
§ 8	Cylindres à centre et cônes du second degré	178
§ 9	Paraboloides et cylindres paraboliques	182
§ 10	Surfaces de révolution	186
§ 11	Notion géométrique de tangente et de plan tangent à un ensemble	195
CHAPITRE IV. Champs de vecteurs et torseurs		202
§ 1	Endomorphismes antisymétriques d'un espace vectoriel euclidien	202
§ 2	Cas d'un espace de dimension 3	205
§ 3	Notion générale de champ de vecteurs	210
§ 4	Champs de gradients (sur un espace euclidien)	214
§ 5	Cas d'un espace euclidien de dimension 3 : rotationnel	219
§ 6	Formules d'analyse vectorielle	226
§ 7	Champs équiprojectifs	228
§ 8	Torseurs	232
§ 9	Axe central d'un torseur	235
§ 10	Comoment de deux torseurs	237
§ 11	Torseurs élémentaires	239
§ 12	Vecteurs glissants. Vecteurs liés	240
§ 13	Décomposition d'un torseur en torseurs élémentaires	245
§ 14	Sommes de glisseurs	249
Appendice. Torseurs parallèles à un plan. Champs équiprojectifs de \mathcal{E}_2		252
CHAPITRE V. Etude affine des arcs géométriques		253
§ 1	Chemins. Arcs géométriques	253
§ 2	Arcs orientés	259
§ 3	Sous-arcs. Arcs réguliers	261
§ 4	Contact des arcs	269
§ 5	Images d'un arc. Invariance du contact dans un difféomorphisme	273
§ 6	Sous-espaces fondamentaux	275
§ 7	Résultats pratiques. Exemples	281
§ 8	Caractérisation des arcs contenus dans une sous-variété affine	284
§ 9	Etude affine des arcs plans simples	288
§ 10	Branches infinies des arcs plans	292
§ 11	Courbes planes définies implicitement	296
§ 12	Exemples de courbes algébriques	303
CHAPITRE VI. Propriétés métriques des arcs		308
§ 1	Notion générale d'arc rectifiable. Longueur	308
§ 2	Cas euclidien	313
§ 3	Paramètres normaux. Courbure. Contact	318

§ 4	Cas d'un plan orienté. Formules de Frenet.....	326
§ 5	Etude locale d'un arc plan.....	332
§ 6	Fonctions angulaires associées à un arc plan.....	335
§ 7	Equations intrinsèques d'un arc plan.....	342
§ 8	Arcs de \mathcal{E}_3 . Courbure, torsion, repère de Serret-Frenet.....	347
§ 9	Calcul de la courbure et de la torsion.....	351
§ 10	Etude métrique locale des arcs de \mathcal{E}_3	357
§ 11	Equations intrinsèques d'un arc de \mathcal{E}_3	361
§ 12	Hélices dans \mathcal{E}_3	368
 CHAPITRE VII. Construction de courbes planes.....		 373
§ 1	Un exemple de paramétrisation cartésienne.....	373
§ 2	Etude globale de paramétrisations.....	380
§ 3	Construction des courbes planes définies en coordonnées polaires....	388
§ 4	Exemples de construction de courbes définies en coordonnées polaires	395
§ 5	Développées, développantes, courbes parallèles.....	401
§ 6	Courbes trochoïdes et cycloïdes.....	413
§ 7	Propriétés générales des courbes cycloïdales.....	419
§ 8	Etude de quelques courbes cycloïdales particulières.....	425
 CHAPITRE VIII. Propriétés affines des surfaces.....		 436
§ 1	Nappes géométriques.....	436
§ 2	Etude du support d'une nappe.....	440
§ 3	Nappes régulières.....	442
§ 4	Plan tangent.....	446
§ 5	Position d'une nappe par rapport à un plan tangent.....	456
§ 6	Surfaces réglées.....	462
§ 7	Surfaces développables.....	467
§ 8	Plongements. Sous-variétés.....	470
 CHAPITRE IX. Propriétés métriques des surfaces.....		 475
§ 1	Première forme quadratique fondamentale.....	475
§ 2	Normale. Repère de Darboux.....	480
§ 3	Deuxième forme quadratique fondamentale.....	488
§ 4	Endomorphisme associé à la deuxième forme fondamentale.....	497
§ 5	Torsion géodésique. Directions principales.....	501
§ 6	Détermination effective des directions et courbures principales.....	507
§ 7	Exemples.....	512
§ 8	Courbes remarquables tracées sur une nappe.....	517
§ 9	Equations différentielles de la forme $A du^2 + 2 B du dv + C dv^2 = 0$ Détermination des asymptotiques et des lignes de courbure.....	523
§ 10	Détermination des géodésiques.....	530

X *Table des matières*

CHAPITRE X. Repère mobile	537
§ 1 Préliminaires	538
§ 2 Notion générale de repère mobile à k paramètres	540
§ 3 Repères mobiles à un paramètre	543
§ 4 Repères mobiles indéformables en dimension 2 ou 3	548
§ 5 Repères mobiles indéformables à k paramètres de \mathcal{E}_3 . Exemples	554
§ 6 Retour aux repères mobiles à un paramètre de \mathcal{E}_3 . Principe d'addition des vecteurs rotations	557
CHAPITRE XI. Cinématique du point	560
§ 1 Introduction	560
§ 2 Détermination d'un mouvement ponctuel	564
§ 3 Composantes de la vitesse et de l'accélération	568
§ 4 Mouvement circulaire	572
§ 5 Mouvement à accélération centrale	574
§ 6 Détermination d'un mouvement à accélération centrale dont les conditions initiales sont données	578
§ 7 Mouvement ponctuel newtonien	583
CHAPITRE XII. Cinématique du solide	593
§ 1 Notion générale de système matériel en mouvement	593
§ 2 Solides en mouvement	596
§ 3 Espaces mobiles	599
§ 4 Espace mobile lié à un solide en mouvement	603
§ 5 Champ des vitesses et rotation instantanée d'un espace mobile	606
§ 6 Relations avec la notion de repère mobile	608
§ 7 Mouvement défini par un repère orthonormal mobile	612
§ 8 Exemples fondamentaux de mouvements	614
§ 9 Mouvement ponctuel relatif	622
§ 10 Mouvement relatif d'un espace mobile par rapport à un autre	627
§ 11 Axoïdes	633
§ 12 Mouvement plan sur plan	637
EXERCICES	645
BIBLIOGRAPHIE	727
INDEX ALPHABÉTIQUE	729



Jacqueline Lelong-Ferrand
Jean-Marie Arnaudiès

COURS DE MATHÉMATIQUES

3. géométrie et cinématique

Ce troisième tome du *Cours de mathématiques* de Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès traite d'une manière exhaustive toutes les questions de géométrie et de cinématique figurant au programme des classes préparatoires : géométrie affine et euclidienne de dimension n , étude affine et métrique des courbes et des surfaces, cinématique du point et du solide. Il recouvre ainsi la partie « Géométrie » du programme de premier cycle ainsi qu'une part notable du programme de mécanique de ce même cycle.

Suivant scrupuleusement les directives officielles, les auteurs ont traité toutes ces questions dans le cadre général et rigoureux de la mathématique d'aujourd'hui, avec le maximum de clarté. Mais les développements théoriques ne leur ont pas fait perdre de vue les applications : grâce aux nombreux exemples traités, les candidats aux grandes écoles y trouveront les méthodes de raisonnement et de calcul dont ils ont besoin pour résoudre les problèmes qui leur sont proposés ; ils trouveront également, à la fin du volume, de nombreux énoncés d'exercices leur permettant de se préparer de manière efficace aux concours.

Cet ouvrage constituera aussi un outil essentiel pour les candidats à l'agrégation et pour les professeurs du second degré qui ont maintenant à enseigner une géométrie renouvelée.

Ce cours de mathématiques comprend 4 tomes :

1. Algèbre
2. Analyse
3. Géométrie et cinématique
4. Équations différentielles, intégrales multiples

JACQUELINE
LELONG-FERRAND
est professeur à l'université
Pierre et Marie Curie,
Paris 6.

JEAN-MARIE ARNAUDIÈS
est professeur de
mathématiques spéciales
au lycée Pierre de Fermat
à Toulouse.



9 782100 057160

ISBN 2 10 005716 2
Code 045716

<http://www.dunod.com>

