

**LELONG-FERRAND  
ARNAUDIÈS**

**Cours de  
mathématiques**

**2. analyse**



LES COURS DE RÉFÉRENCE

4<sup>e</sup> édition

**DUNOD**

M43/T2

# LELONG-FERRAND/ARNAUDIÈS

## Cours de mathématiques

### 2. analyse



**Jacqueline Lelong-Ferrand**

*Professeur à l'université Pierre et Marie Curie, Paris 6*

**Jean-Marie Arnaudès**

*Professeur de mathématiques spéciales au lycée Pierre de Fermat, Toulouse*

*Tous deux sont anciens élèves de l'École normale supérieure*

22244  $\frac{2}{2}$

**4<sup>e</sup> édition**

DUNOD

M43/T2

# LELONG-FERRAND/ARNAUDIÈS

## Cours de mathématiques

### 2. analyse



**Jacqueline Lelong-Ferrand**

*Professeur à l'université Pierre et Marie Curie, Paris 6*

**Jean-Marie Arnaudès**

*Professeur de mathématiques spéciales au lycée Pierre de Fermat, Toulouse*

*Tous deux sont anciens élèves de l'École normale supérieure*

22244  $\frac{21}{2}$

**4<sup>e</sup> édition**

DUNOD

# Table des matières

CHAPITRE I. Nombres réels. Extensions .....	1
§ 1 Introduction. Propriétés des rationnels .....	1
§ 2 Suites convergentes, suites de Cauchy (dans $\mathbf{Q}$ ) .....	2
§ 3 Construction de $\mathbf{R}$ ; structure algébrique. Notations .....	5
§ 4 Relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ .....	8
§ 5 Approximation des réels par les rationnels. Axiome d'Archimède .....	11
§ 6 Représentation décimale des nombres réels .....	13
§ 7 Suites convergentes et suites de Cauchy dans $\mathbf{R}$ .....	15
§ 8 Caractérisation axiomatique de $\mathbf{R}$ .....	18
§ 9 Grandeurs mesurables .....	22
§ 10 Prolongements de $\mathbf{R}$ .....	25
§ 11 Propriétés des limites. Exemples .....	29
CHAPITRE II. Suites de nombres réels. Fonctions numériques .....	33
§ 1 Propriétés de $\mathbf{R}$ liées à la relation d'ordre .....	33
§ 2 Bornes supérieure et inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ .....	36
§ 3 Suites monotones .....	37
§ 4 Plus grande et plus petite limite .....	39
§ 5 Valeurs d'adhérence. Théorème de Bolzano-Weierstrass .....	42
§ 6 Notation de voisinage .....	45
§ 7 Limites de fonctions numériques définies sur les parties de $\mathbf{R}$ .....	48
§ 8 Limites à droite et à gauche. Fonctions monotones .....	52
§ 9 Fonctions continues .....	54
§ 10 Fonctions strictement croissantes sur un intervalle. Homéomorphismes .....	58
CHAPITRE III. Éléments de topologie .....	62
§ 1 Distances. Espaces métriques .....	62
§ 2 Espaces vectoriels normés .....	66
§ 3 Boules. Voisinages. Ouverts et fermés .....	70
§ 4 Notion générale de structure topologique .....	73
§ 5 Intérieur, adhérence, frontière d'un ensemble .....	75
§ 6 Limites de suites. Suites de Cauchy .....	78
§ 7 Limites de fonctions. Fonctions continues .....	82
§ 8 Limites et continuité dans les espaces métriques .....	88
§ 9 Espaces produits. Cas de $\mathbf{R}^n$ .....	92
§ 10 Espaces compacts .....	98
§ 11 Espaces et ensembles connexes .....	105
§ 12 Espaces vectoriels normés. Applications linéaires .....	108

<b>CHAPITRE IV. Dérivées. Développements limités.</b>	117
§ 1 Notion de dérivée. Fonctions dérivables.	118
§ 2 Application à l'étude des fonctions élémentaires.	124
§ 3 Théorème de Rolle. Applications.	128
§ 4 Formule générale des accroissements finis.	132
§ 5 Fonctions convexes d'une variable numérique.	136
§ 6 Formules de Taylor.	140
§ 7 Développements limités polynomiaux.	146
§ 8 L'algèbre des développements limités.	155
§ 9 Généralisation. Développements asymptotiques.	164
§ 10 Exemples de développements asymptotiques.	174
<b>CHAPITRE V. Différentielles. Applications différentiables</b>	178
§ 1 Introduction. Espaces affines.	178
§ 2 Différentielles.	181
§ 3 Interprétation de la différentiabilité. Notations.	188
§ 4 Propriétés des applications différentiables.	192
§ 5 Formule des accroissements finis.	201
§ 6 Extrema des fonctions différentiables.	203
§ 7 Différentielles des fonctions de plusieurs variables.	208
§ 8 Théorème de Schwarz.	213
§ 9 Formule de Taylor.	220
<b>CHAPITRE VI. Applications des différentielles</b>	225
§ 1 Développements limités des fonctions de plusieurs variables. Applications.	225
§ 2 Fonctions homogènes et fonctions convexes sur un espace vectoriel.	228
§ 3 Le problème des fonctions implicites.	233
§ 4 Extension des résultats précédents.	240
§ 5 Applications réciproques. Changements de variables.	244
§ 6 Rang d'une application. Fonctions indépendantes.	247
<b>CHAPITRE VII. Séries</b>	253
§ 1 Séries. Propriétés générales.	254
§ 2 Séries numériques à termes positifs et séries absolument convergentes.	259
§ 3 Exemples de séries à termes positifs. Etude de $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ ( $\alpha \in \mathbf{R}$ )	266
§ 4 Règles de Cauchy, d'Alembert, Duhamel.	270
§ 5 Exemples de séries semi-convergentes.	276
§ 6 Problèmes d'associativité et de commutativité pour les séries.	280
§ 7 Calcul approché de la somme d'une série numérique.	283
§ 8 Produits infinis.	291
§ 9 Familles sommables.	296
§ 10 Séries doubles.	302
<b>CHAPITRE VIII. Suites et séries de fonctions. Etude générale.</b>	309
§ 1 Convergence simple et convergence uniforme.	310
§ 2 Critères de convergence uniforme.	312

§ 3	Limite uniforme de fonctions continues .....	316
§ 4	Limites de fonctions dérivables ou différentiables. ....	320
§ 5	Séries de fonctions .....	324
§ 6	Critères de convergence uniforme pour les séries .....	326
§ 7	Autres critères .....	330
§ 8	Exponentielle complexe .....	333
§ 9	Fonctions trigonométriques et hyperboliques .....	340
§ 10	Argument et logarithme d'un nombre complexe .....	343
<b>CHAPITRE IX. Séries entières. Fonctions analytiques .....</b>		<b>348</b>
§ 1	Rayon et disque de convergence .....	348
§ 2	Fonctions définies par une série entière .....	352
§ 3	Etude sur le cercle de convergence .....	360
§ 4	Somme et produit de séries entières .....	361
§ 5	Composition des séries entières .....	363
§ 6	Inverse d'une série entière .....	367
§ 7	Séries majorantes. Séries entières réciproques .....	370
§ 8	Développements en série entière de $\text{Log}(1+z)$ , $(1+z)^{\alpha}$ , $\text{Arc tg } z$ , $\text{Arc sin } z$ .....	375
§ 9	Fonctions analytiques d'une variable réelle ou complexe .....	380
§ 10	Existence de fonctions analytiques .....	383
§ 11	Propriétés des zéros ; prolongement analytique .....	386
§ 12	Séries entières d'endomorphismes. Exponentielle d'une matrice .....	391
<b>CHAPITRE X. Intégrale simple .....</b>		<b>397</b>
§ 1	Intégration des fonctions en escalier .....	398
§ 2	Intégrale de Riemann (fonctions numériques) .....	402
§ 3	Intégrale de Riemann (fonctions vectorielles) .....	408
§ 4	Propriétés générales de l'intégrale de Riemann .....	413
§ 5	Produit de fonctions intégrables. Inégalités de Schwarz et de Minkowski. ....	418
§ 6	Exemples de fonctions intégrables : fonctions réglées, fonctions continues ..	421
§ 7	Intégrale indéfinie. Dérivation .....	427
§ 8	Changement de variable .....	434
§ 9	Intégration par parties. Applications .....	439
§ 10	Calcul des primitives .....	444
§ 11	Valeur approchée d'une intégrale définie .....	454
§ 12	Limite uniforme de fonctions intégrables. Intégration terme à terme d'une série	461
§ 13	Formules de la moyenne .....	466
§ 14	Sommes de Riemann .....	468
<b>CHAPITRE XI. Intégrales généralisées. Intégrales dépendant d'un paramètre .....</b>		<b>473</b>
§ 1	Intégrales généralisées .....	473
§ 2	Calcul pratique des intégrales généralisées .....	479
§ 3	Critères généraux de convergence .....	483
§ 4	Convergence absolue et semi-convergence. Règles pratiques .....	487
§ 5	Intégrales semi-convergentes. Règle d'Abel .....	495
§ 6	Relations entre la convergence des intégrales et la convergence des séries .....	499
§ 7	Intégrales définies dépendant d'un paramètre .....	503
§ 8	Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre .....	510
§ 9	Critères de convergence uniforme pour les intégrales .....	512

**X Table des matières**

§ 10 Exemples .....	515
§ 11 Limites d'intégrales généralisées .....	519
§ 12 Application aux séries .....	523
§ 13 Appendice : définition de l'intégrale de Lebesgue .....	524
<b>CHAPITRE XII. Séries de Fourier .....</b>	<b>528</b>
§ 1 Séries trigonométriques .....	528
§ 2 Coefficients de Fourier .....	532
§ 3 Règles de convergence .....	537
§ 4 Quelques applications des séries de Fourier .....	544
§ 5 Convergence des séries de Fourier au sens de Cesaro .....	545
§ 6 Problèmes d'approximation .....	550
§ 7 Un exemple d'espace préhilbertien .....	551
§ 8 Théorème de Parseval .....	555
<b>EXERCICES .....</b>	<b>559</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>634</b>
<b>INDEX ALPHABÉTIQUE .....</b>	<b>635</b>



Jacqueline Lelong-Ferrand  
Jean-Marie Arnaudès

4<sup>e</sup> édition

## COURS DE MATHÉMATIQUES

### 2. analyse

Le tome 2 du *Cours de mathématiques* de Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudès contient l'exposé complet du programme d'analyse enseigné dans le premier cycle universitaire et au-delà.

Ce livre est d'abord un outil de travail pour les élèves des classes préparatoires aux Grandes Ecoles et les étudiants de 1<sup>er</sup> cycle des Universités scientifiques : les uns y trouveront les méthodes **modernes** et **efficaces** qui leur permettront de faire face aux exigences actuelles des grands concours ; les autres seront en possession d'un traité de base **clair** et **rigoureux**, les préparant directement à la Maîtrise, et ils s'y reporteront avec plaisir tout au long de leurs études.

C'est aussi un ouvrage de référence pour tous ceux qui veulent approfondir ou compléter leurs connaissances tout en se familiarisant avec les méthodes d'aujourd'hui.

Ce volume rendra service aux étudiants qui veulent apprendre à manier correctement les outils mathématiques et en comprendre le fonctionnement : ils y trouveront à la fois la matière d'un livre de cours et celle d'un livre d'exercices. A ce titre, il pourra aider les candidats à l'agrégation et les professeurs de lycée qui veulent garder le contact avec l'Université.

Ce cours de mathématiques comprend 4 tomes :

1. Algèbre
2. Analyse
3. Géométrie et cinématique
4. Équations différentielles, intégrales multiples

JACQUELINE  
LELONG-FERRAND  
est professeur à l'université  
Pierre et Marie Curie,  
Paris 6.

JEAN-MARIE ARNAUDÈS  
est professeur de  
mathématiques spéciales  
au lycée Pierre de Fermat  
à Toulouse.



9 782100 063420

ISBN 2 10 006342 1

<http://www.dunod.com>

