

**J. Lelong - Ferrand**  
**J.M. Arnaudiès**

---

**Cours de mathématiques**

**Tome 1**

**Algèbre**

*3<sup>e</sup> édition*

*Classes préparatoires*  
*1<sup>er</sup> cycle universitaire*

**Dunod Université**

M43

# Cours de mathématiques

Tome 1

# Algèbre

3<sup>e</sup> édition

Jacqueline LELONG-FERRAND

Professeur à l'Université  
Pierre-et-Marie-Curie à Paris

Jean-Marie ARNAUDIÈS

Professeur de Mathématiques Spéciales  
au Lycée Pierre de Fermat à Toulouse

Anciens élèves de l'École Normale Supérieure

M43 I (A<sup>2</sup>)

1406 1/5



Dunod

# Table des matières

†	CHAPITRE I. Vocabulaire de théorie des ensembles .....	1
	§ 1 Notions sur la formalisation .....	1
	§ 2 Règles de logique formelle .....	3
	§ 3 Quantificateurs .....	6
	§ 4 Opérations sur les ensembles .....	8
	§ 5 Correspondances et applications .....	12
	§ 6 Familles .....	17
	§ 7 Produits .....	20
	§ 8 Relations d'équivalence et ensemble quotient .....	22
	§ 9 Relations d'ordre .....	26
	§ 10 Dénombrement .....	31
	§ 11 Les ensembles de base .....	39
†	CHAPITRE II. Lois de composition. Groupes .....	40
	§ 1 Généralités .....	40
	§ 2 Propriétés d'une loi de composition .....	45
	§ 3 Axiomes de la structure de groupe. Exemples de groupes. Homomorphismes .....	48
	§ 4 Sous-groupe. Groupe engendré. Groupe produit .....	52
	§ 5 Groupe quotient dans le cas abélien .....	57
	§ 6 Groupes quelconques : classes. Sous-groupes distingués. Quotient ..	62
	§ 7 Groupes finis. Groupe symétrique .....	65
	§ 8 Groupes opérant sur un ensemble .....	69
†	CHAPITRE III. Structures algébriques faisant intervenir plusieurs lois .....	77
	§ 1 Généralités .....	77
	§ 2 Généralités sur les anneaux .....	79
	§ 3 Sous-anneaux et anneaux produits .....	87
	§ 4 Homomorphismes, idéaux et anneaux quotients .....	89
	§ 5 Divisibilité dans un anneau .....	95
	§ 6 Corps .....	99
	§ 7 Calcul dans le corps des nombres complexes .....	104
	§ 8 Structure de module sur un anneau .....	111
	§ 9 Structure d'algèbre sur un anneau commutatif .....	118
×	CHAPITRE IV. Polynômes à une ou plusieurs indéterminées .....	120
	§ 1 Définition de $A[X]$ . Propriétés générales .....	120
	§ 2 Division euclidienne. Propriétés arithmétiques de $K[X]$ lorsque $K$ est un corps commutatif .....	125
	§ 3 Algorithme d'Euclide .....	131
	§ 4 Polynômes irréductibles sur un corps .....	135
	§ 5 Fonction polynôme. Racines. Formule de Taylor .....	137
	§ 6 Relations entre les coefficients et les racines. Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$ .....	144
	§ 7 Notions sur $K[X_1, \dots, X_n]$ .....	149

CHAPITRE V. <b>Fonctions symétriques. Equations algébriques (Théorie élémentaire)</b> .....	159
§ 1 Polynômes symétriques.....	159
§ 2 Formules de Newton.....	166
§ 3 Equations du deuxième et du troisième degré.....	172
§ 4 Equation du quatrième degré.....	178
§ 5 Equations de degré $\geq 5$ .....	182
 CHAPITRE VI. <b>Elimination</b> .....	 187
§ 1 Résultant de deux polynômes à une variable.....	187
§ 2 Méthode de Cayley. Exemples de calcul du résultant.....	194
§ 3 Application de l'élimination à la transformation de Tschirnhaus... ..	200
§ 4 Discriminant d'un polynôme .....	206
§ 5 Expressions des racines communes à deux équations lorsque leur résultant est nul.....	210
 X CHAPITRE VII. <b>Fractions rationnelles</b> .....	 217
§ 1 Le corps $K(X)$ .....	217
§ 2 Décomposition en éléments simples sur un corps quelconque $K$ .....	221
§ 3 Recherche des parties polaires relatives à des facteurs de la forme $(X - a)^{\alpha}$ .....	224
§ 4 Notions sur les séries formelles.....	227
§ 5 Exemples de calculs pratiques.....	232
§ 6 Intégration des fractions rationnelles.....	239
 X CHAPITRE VIII. <b>Espaces vectoriels</b> .....	 245
§ 1 Généralités.....	245
§ 2 Caractérisation des bases d'un espace vectoriel.....	250
§ 3 Théorème de la dimension finie.....	253
§ 4 Espaces vectoriels et applications linéaires. Rang d'une application linéaire.....	259
§ 5 Dualité.....	262
§ 6 Langage de la géométrie affine.....	270
 X CHAPITRE IX. <b>Matrices</b> .....	 275
§ 1 Propriétés générales.....	275
§ 2 Matrices et applications linéaires.....	285
§ 3 Changement de base.....	293
 X CHAPITRE X. <b>Les déterminants et leurs applications</b> .....	 298
§ 1 Applications et formes multilinéaires.....	298
§ 2 Déterminants.....	304
§ 3 Exemples de calcul de déterminants.....	314
§ 4 Application des déterminants à l'étude du rang d'une matrice.....	320
§ 5 Equations linéaires.....	323

**X Table des matières**

<b>CHAPITRE XI. Réduction des matrices carrées et application</b> .....	332
§ 1 Valeurs propres, polynôme caractéristique .....	332
§ 2 Sous-espaces propres .....	336
§ 3 Polynômes d'endomorphismes. Le théorème de Cayley-Hamilton ..	342
§ 4 Sous-espaces caractéristiques .....	348
§ 5 Endomorphismes diagonalisables .....	353
§ 6 Endomorphismes nilpotents. Facteurs invariants. Réduction de Jordan .....	355
<b>CHAPITRE XII. Formes bilinéaires et formes quadratiques</b> .....	361
§ 1 Généralités sur les formes bilinéaires .....	361
§ 2 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques .....	363
§ 3 Orthogonalité .....	367
§ 4 Problème de la classification. Solution lorsque $K = \mathbf{C}$ ou $K = \mathbf{R}$ ..	371
§ 5 Espace euclidien .....	376
§ 6 Projections et symétries .....	384
§ 7 Groupe orthogonal, le groupe orthogonal réel .....	386
<b>CHAPITRE XIII. Formes hermitiennes. Théorie spectrale. Isométries de <math>\mathbf{R}^n</math></b> ..	394
§ 1 Généralités .....	394
§ 2 Classification des formes hermitiennes sur un espace de dimension finie .....	397
§ 3 Espaces préhilbertiens de dimension finie .....	398
§ 4 Projections et symétries .....	402
§ 5 Groupe unitaire .....	403
§ 6 Théorie spectrale (formes hermitiennes) .....	407
§ 7 Théorie spectrale (formes quadratiques réelles) .....	411
§ 8 Théorie spectrale (formes quadratiques sur un corps quelconque) ..	416
§ 9 Isométries de $E_n$ (espace euclidien de dimension $n$ ) .....	422
§ 10 Isométries vectorielles .....	425
§ 11 Isométries affines : théorème de prolongement .....	431
<b>CHAPITRE XIV. Polynômes à plusieurs indéterminées et applications géométriques</b> .....	436
§ 1 Anneaux factoriels .....	436
§ 2 Factorialité des anneaux de polynômes .....	440
§ 3 Correspondances algébriques. Homographies (en caractéristique 0) ..	444
§ 4 Hypersurfaces algébriques dans $\mathbf{C}^n$ ( $n \geq 2$ ) .....	448
§ 5 Courbes algébriques et courbes algébriques unicursales dans $\mathbf{C}^2$ .....	453
<b>EXERCICES</b> .....	459
<b>PROBLÈMES</b> .....	506
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	525
<b>SYMBOLES UTILISÉS DANS CE TRAITÉ</b> .....	526
<b>INDEX ALPHABÉTIQUE</b> .....	529

Collection conçue à l'intention des étudiants,  
**DUNOD UNIVERSITÉ** est adaptée aux enseignements des Universités,  
des classes préparatoires et des Grandes Ecoles.

**Ouvrages de base** (série marron) :  
1<sup>er</sup> cycle universitaire et classes préparatoires.

**Ouvrages fondamentaux** (série orange) :  
enseignements s'étendant sur les 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> cycles universitaires.

**Ouvrages de spécialité** (série violette) :  
2<sup>e</sup> cycle universitaire et formation des ingénieurs.

Dû à la collaboration de deux mathématiciens ayant la double expérience de l'enseignement dans les Universités et dans les classes préparatoires aux Grandes Ecoles, cet ouvrage réunit en un seul volume les notions d'algèbre qui doivent être acquises au cours du premier cycle universitaire et qui sont exigées aux concours d'entrée aux Grandes Ecoles.

Donnant des démonstrations claires, rapides et rigoureuses, sans faire appel à des théories hors programme, cet ouvrage *pratique* est également un livre *vivant* qui montre, en ménageant une ouverture sur des théories plus vastes, que les mathématiques sont une science en marche.

On trouvera en fin d'ouvrage une longue série d'exercices classés par chapitres : les uns sont originaux, les autres constituent une synthèse des questions récemment posées aux concours d'entrée aux Grandes Ecoles.

La présentation vise avant tout à la clarté et à la commodité : l'ouvrage est *clairement structuré* ; les développements qui peuvent être laissés de côté lors d'une première lecture sont signalés ; un lexique placé en fin d'ouvrage permet de trouver rapidement le sujet cherché.

Cet *ouvrage de base* intéresse, outre les étudiants de « taupe » et de 1<sup>er</sup> cycle universitaire, les futurs enseignants et les candidats à l'agrégation ; mais c'est aussi un ouvrage de référence pour un plus large public.

Ce Cours de mathématiques comprend 4 tomes :

- 1 - Algèbre
- 2 - Analyse
- 3 - Géométrie et cinématique
- 4 - Équations différentielles, intégrales multiples.



9 782040 070748



ISBN 2-04-007074-5