

Cours

Jean-Marie Monier

# Algèbre I

Cours et 600 exercices corrigés

1<sup>re</sup> année MPSI, PCSI, PTSI

2<sup>e</sup> édition

*L'intégrale*

DUNOD

7 439T<sub>1</sub>

# Algèbre I

Cours et 600 exercices corrigés

I<sup>re</sup> année MPSI, PCSI, PTSI

**Jean-Marie Monier**

*Professeur en classes de Spéciales  
au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon*



234 96  $\frac{1}{1}$

2<sup>e</sup> édition

DUNOD

# Table des matières

## Première partie – Cours

### Chapitre 1

#### Vocabulaire de la théorie des ensembles 3

<b>1.1</b>	Ensembles	4
1.1.1	Éléments de logique	4
1.1.2	Ensembles	6
1.1.3	Inclusion	6
1.1.4	Opérations dans $\mathfrak{P}(E)$	7
<b>1.2</b>	Relations	11
1.2.1	Généralités	11
1.2.2	Relations d'équivalence	15
1.2.3	Relations d'ordre	18
<b>1.3</b>	Applications	23
1.3.1	Définitions	23
1.3.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité	26
1.3.3	Restrictions et prolongements	30
1.3.4	Ordre et applications	31
1.3.5	Images directes ou réciproques de parties par une application	33
1.3.6	Familles	34
	Complément aux exercices	37

### Chapitre 2

#### Structures algébriques 39

<b>2.1</b>	Lois de composition interne	39
<b>2.2</b>	Groupes	47
2.2.1	Généralités	47
2.2.2	Sous-groupes	49
2.2.3	Morphismes de groupes	53
<b>2.3</b>	Anneaux	56
2.3.1	Définitions	56
2.3.2	Calculs dans un anneau	56
2.3.3	Sous-anneaux	59
2.3.4	Morphismes d'anneaux	60
2.3.5	Anneaux intègres	61
<b>2.4</b>	Corps	62
	Compléments aux exercices	64

## Chapitre 3

## Nombres entiers, nombres rationnels

### 3.1 Propriétés de $\mathbb{N}$

- 3.1.1 Structure de  $\mathbb{N}$
- 3.1.2 Le principe de récurrence
- 3.1.3 Divisibilité dans  $\mathbb{N}$

### 3.2 Ensembles finis, ensembles infinis

- 3.2.1 Equipotence
- 3.2.2 Ensembles finis
- 3.2.3 Ensembles infinis

### 3.3 Analyse combinatoire

- 3.3.1 Permutations
- 3.3.2 Arrangements
- 3.3.3 Combinaisons

### 3.4 Le groupe symétrique

- 3.4.1 Structure de  $\mathfrak{S}_n$
- 3.4.2 Transpositions
- 3.4.3 Cycles

### 3.5 Dénombrements

- 3.5.1 Dénombrements classiques
- 3.5.2 Exemples de dénombrements

### 3.6 Propriétés de $\mathbb{Z}$

### 3.7 Propriétés de $\mathbb{Q}$

## Chapitre 4

## Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

### 4.1 Divisibilité

- 4.1.1 Généralités
- 4.1.2 Congruences

### 4.2 pgcd, ppcm

- 4.2.1 Généralités
- 4.2.2 Propriétés
- 4.2.3 Algorithme d'Euclide

### 4.3 Nombres premiers entre eux

- 4.3.1 Généralités
- 4.3.2 Théorème de Bezout
- 4.3.3 Propriétés
- 4.3.4 Applications

<b>4.4</b>	Nombres premiers	125
4.4.1	Généralités	125
4.4.2	Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , $p$ premier	126
4.4.3	Décomposition primaire	127
	Compléments aux exercices	136

## Chapitre 5

### **Polynômes, fractions rationnelles** **143**

<b>5.1</b>	Algèbre $K[X]$	144
5.1.1	Définition	144
5.1.2	Addition	145
5.1.3	Multiplication	146
5.1.4	Loi externe	148
5.1.5	Composition	151
5.1.6	Dérivation	152
5.1.7	Fonctions polynomiales	153
5.1.8	Notion de polynôme à plusieurs indéterminées	157
<b>5.2</b>	Arithmétique dans $K[X]$	159
5.2.1	Divisibilité	159
5.2.2	Division euclidienne	160
5.2.3	Pgcd, ppcm	163
5.2.4	Polynômes premiers entre eux	168
5.2.5	Polynômes irréductibles	171
5.2.6	Division suivant les puissances croissantes	173
<b>5.3</b>	Zéros des polynômes	175
5.3.1	Généralités	175
5.3.2	Polynômes scindés	178
5.3.3	Utilisation de la dérivation	182
5.3.4	Cas de $\mathbb{C}[X]$	184
5.3.5	Cas de $\mathbb{R}[X]$	188
<b>5.4</b>	Fractions rationnelles	193
5.4.1	Corps $K(X)$	193
5.4.2	Décomposition en éléments simples	199

## Chapitre 6

### **Espaces vectoriels** **215**

<b>6.1</b>	Structure d'espace vectoriel	216
<b>6.2</b>	Sous-espaces vectoriels	219
<b>6.3</b>	Dépendance et indépendance linéaires	224
6.3.1	Familles liées, familles libres	224
6.3.2	Sous-espace engendré par une partie	227
6.3.3	Somme de plusieurs sev	229
6.3.4	Familles génératrices, bases	233
<b>6.4</b>	Théorie de la dimension	234

## Chapitre 7

## Applications linéaires

245

### 7.1 Généralités

246

7.1.1 Définitions

246

7.1.2 Noyau, image

250

7.1.3 Applications linéaires et familles de vecteurs

251

### 7.2 Opérations sur les applications linéaires

255

7.2.1 L'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$

255

7.2.2 Composition

255

7.2.3 Le groupe  $\mathcal{GL}(E)$

260

### 7.3 Cas de la dimension finie

264

7.3.1 Le théorème du rang et ses conséquences

264

7.3.2 Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$

268

Complément aux exercices

270

## Chapitre 8

## Matrices

271

### 8.1 Calcul matriciel

272

8.1.1 Notion de matrice

272

8.1.2 Matrices et applications linéaires

273

8.1.3 L'espace vectoriel  $\mathbf{M}_{n,p}(K)$

274

8.1.4 Multiplication des matrices

276

8.1.5 Le groupe  $\mathbf{GL}_n(K)$

282

8.1.6 Rang d'une matrice

286

8.1.7 Opérations élémentaires

289

8.1.8 Transposition

292

8.1.9 Trace d'une matrice carrée

294

### 8.2 Changement de bases

296

8.2.1 Matrices de passages

296

8.2.2 Changement de base pour un vecteur

297

8.2.3 Changement de bases pour une application linéaire

297

8.2.4 Changement de base pour un endomorphisme

301

### 8.3 Matrices remarquables

303

8.3.1 Matrices symétriques, matrices antisymétriques

303

8.3.2 Matrices triangulaires

305

8.3.3 Matrices diagonales

308

Complément aux exercices

310

## Chapitre 9

## Déterminants, systèmes linéaires

311

### 9.1 Applications multilinéaires

311

9.1.1 Généralités

311

9.1.2 Applications multilinéaires alternées

311

<b>9.2</b>	Déterminant d'une famille de $n$ vecteurs dans une base d'un ev de dimension $n$	315
9.2.1	Espace $\Lambda_n(E)$	315
9.2.2	Propriétés	317
<b>9.3</b>	Déterminant d'un endomorphisme	318
<b>9.4</b>	Déterminant d'une matrice carrée	320
<b>9.5</b>	Développement par rapport à une rangée	323
9.5.1	Cofacteurs et mineurs	323
9.5.2	Comatrice	327
<b>9.6</b>	Calcul des déterminants	329
9.6.1	Déterminant d'une matrice triangulaire	329
9.6.2	Manipulation de lignes et de colonnes	329
9.6.3	Cas $n = 2, n = 3$	332
9.6.4	Déterminant de Vandermonde	333
<b>9.7</b>	Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie	337
<b>9.8</b>	Rang et sous-matrices	339
<b>9.9</b>	Systèmes affines	342
9.9.1	Position du problème	342
9.9.2	Résolution	343

## Chapitre 10

## Espaces vectoriels euclidiens (1<sup>re</sup> étude) 347

<b>10.1</b>	Produit scalaire	348
10.1.1	Généralités	348
10.1.2	Inégalités, normes euclidiennes	350
10.1.3	Orthogonalité	353
<b>10.2</b>	Espaces vectoriels euclidiens	356
10.2.1	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	356
10.2.2	Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales	360
10.2.3	Hyperplans	362
<b>10.3</b>	Groupe orthogonal	364
10.3.1	Endomorphismes orthogonaux	364
10.3.2	Matrices orthogonales	366
<b>10.4</b>	Géométrie vectorielle euclidienne plane	370
<b>10.5</b>	Géométrie vectorielle euclidienne en dimension 3	375
10.5.1	Endomorphismes orthogonaux de $E_3$	375
10.5.2	Produit vectoriel	384
	Complément aux exercices	389

Jean-Marie Monier

2<sup>e</sup> édition

# ALGÈBRE 1

## Cours et 600 exercices corrigés

**COURS**

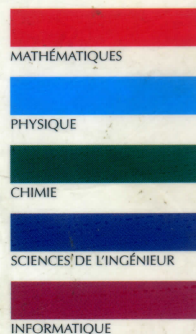
Cette nouvelle édition de *cours de mathématiques* de Jean-Marie Monier a été entièrement repensée, de manière à répondre très précisément aux aspirations les plus exigeantes des élèves des classes préparatoires : un format agrandi et une nouvelle mise en pages en deux couleurs en améliorent la convivialité et la lisibilité.

Chaque chapitre s'ouvre par une introduction signalant les **prérequis** et dégageant les **objectifs à atteindre**. Une nouvelle rubrique, intitulée « **Du cours aux exercices** », regroupe des conseils de méthodologie pour aider l'étudiant dans la résolution des exercices qui suivent. Des questions situées à la limite du programme sont traitées, en fin de chapitre, sous forme de compléments avec solutions détaillées. Enfin des notes en marge donnent des informations complémentaires au cours (rappels, schémas, conseils...), et des encadrés mettent en valeur les points les plus importants (théorèmes, définitions et propositions à retenir).

L'objectif de ce cours de mathématiques est de devenir l'outil de travail familial, efficace et adapté des élèves des classes préparatoires, des étudiants du 1<sup>er</sup> cycle universitaire scientifique et des candidats aux concours externes et internes de recrutement de professeurs.

JEAN-MARIE MONIER est professeur en classe de Spéciales au lycée La Martinière-Monplaisir à Lyon.

COURS		EXERCICES CORRIGÉS		
	ANALYSE	ALGÈBRE	ANALYSE	ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE
SUP	MPSI • PCSI • PTSI		MPSI	
	Analyse 1	<b>Algèbre 1</b>	Analyse MPSI	Algèbre et géométrie MPSI
	Analyse 2	Géométrie 1 <sup>re</sup> et 2 <sup>e</sup> années	PCSI • PTSI	
			Analyse PCSI • PTSI	Algèbre et géométrie PCSI • PTSI
SPÉ	MP • PSI • PC • PT		MP	
	Analyse 3	Algèbre 2	Analyse MP	Algèbre et géométrie MP
	Analyse 4	Géométrie 1 <sup>re</sup> et 2 <sup>e</sup> années	PSI • PC • PT	
			Analyse PSI • PC • PT	Algèbre et géométrie PSI • PC • PT



ISBN 2 10 004440 0  
Code 044440

<http://www.dunod.com>

