

18584/2

Premier cycle LUT
CINAM
BTS
IUT

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

collection dirigée par G. Demengel

Probabilités

Statistique inférentielle

Fiabilité

Outils pour l'ingénieur

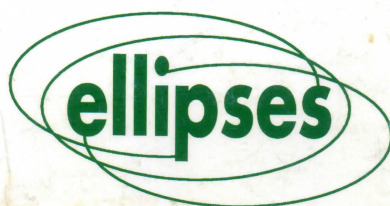
Gilbert DEMENGEL

Paul BÉNICHOU

Rosine BÉNICHOU

Norbert BOY

Jean-Pierre POUGET



M427

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Premier cycle, IUP, Prépa, CNAM, BTS, IUT

collection dirigée par G. Demengel

PROBABILITÉS STATISTIQUE INFÉRENTIELLE FIABILITÉ

Outils pour l'ingénieur

Gilbert DEMENGEL
Paul BÉNICHOU
Rosine BÉNICHOU
Norbert BOY
Jean-Pierre POUGET

18584 2/8



TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 : STATISTIQUE À UNE VARIABLE 5

1. Généralités	5
2. Présentation des séries à une variable	6
3. Analyse statistique (moments)	15
TP 1 Médianes, moyenne	21
TP 2 Regroupement par classe	24
TP 3 Caractère continu	27
TP 4 Intervalles $[m-\sigma, m+\sigma]$ et $[m-2\sigma, m+2\sigma]$. Variable statistique quasi-normale	30
<i>Exercices sur le chapitre 1</i>	37

CHAPITRE 2 : STATISTIQUE À DEUX VARIABLES 41

1. Représentation graphique, nuages de points	41
2. Ajustements affines ou non affines	42
3. Corrélation linéaire	47
4. Droite d'allométrie	49
TP 1 Droite de Mayer ; méthode des moindres carrés	51
TP 2 Méthodes des moindres carrés ; Validation	53
TP 3 Ajustement à l'aide d'un changement d'échelle	55
TP 4 Variables statistiques quasi-normales à 2 modes. Droite de Henry. Ajustement	57
TP 5 Approximations affines de paramètres dans des équations de la physique	63
TP 6 Série chronologique	67
<i>Exercices sur le chapitre 2</i>	69

CHAPITRE 3 : PROBABILITÉS SUR LES ENSEMBLES FINIS 72

1. Introduction	72
2. Opérations sur les événements	73
3. Axiomes des probabilités	74
4. Exemples de probabilités	77
5. Probabilités conditionnelles. Propriétés. Probabilité d'un produit Formule de Bayes	78
6. Événements indépendants	83
7. Dénombrements (combinaisons, ...)	85
TP 1 Mise en œuvre des axiomes dans les jeux	89
TP 2 Épreuves composées par des schémas de tirage	96
TP 3 Dénombrements. Formule du binôme	98
<i>Exercices sur le chapitre 3</i>	103

CHAPITRE 4 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES 108

1. Généralités	108
2. Définition et exemples de lois de probabilité, valeurs caractéristiques	108
3. Variables discrètes à valeurs dans \mathbb{R}^2	117
4. Exemples de variables discrètes infinies	124
TP 1 Variable associée à des tirages ou des jeux	127
TP 2 Exemples classiques de variables aléatoires discrètes	129

TP 3 Variables infinies, intervention de séries	134
TP 4 Variables finies à valeurs couples	139
TP 5 Variables marginales indépendantes, somme de variables binomiales ou Poisson	142
<i>Exercices sur le chapitre 4</i>	146

CHAPITRE 5 : VARIABLES ALÉATOIRES ABSOLUMENT CONTINUES 151

1. Définitions (densité, fonction de répartition)	151
2. Valeurs caractéristiques (moments)	154
3. Exemples classiques de variables aléatoires	155
4. Convergence et approximation de V.A.	161
TP 1 Détermination de densités	167
TP 2 Utilisation de la variable normale	170
TP 3 Moments. Inégalité de Tchébichev	173
TP 4 Ajustement à une loi normale	176
<i>Exercices sur le chapitre 5</i>	179

CHAPITRE 6 : STATISTIQUE INFÉRENTIELLE 183

1. Généralités sur l'échantillonnage	183
2. Estimation d'une moyenne	184
3. Estimation d'un pourcentage	194
4. Tests d'hypothèses (comparaisons)	196
5. Comparaison. Définition du « Khi-deux »	207
TP 1 Estimation ponctuelle	212
TP 2 Distribution d'échantillonnage d'un pourcentage	213
TP 3 Intervalle de confiance d'une moyenne	214
TP 4 Risques d'erreurs dans les tests	215
TP 5 Comparaison. À une valeur standard	217
TP 6 Ajustement et test du χ^2	218
TP 7 et 8 Comparaison de moyennes, de fréquences	221
<i>Exercices sur le chapitre 6</i>	223

CHAPITRE 7 : FIABILITÉ 228

1. Introduction	228
2. Généralités. Terminologie	228
3. La loi exponentielle	232
4. La loi de Weibull	234
5. Fiabilité d'un système et de ses composants	240
TP 1 Utilisation de la loi de Weibull	244
TP 2 Loi de Weibull et loi normale	246
TP 3 Loi exponentielle et loi de Weibull	249
<i>Exercices sur le chapitre 7</i>	252

TABLES NUMÉRIQUES

Distribution de Poisson	254
Paramètres A et B des moments de la loi de Weibull	254
Loi normale centrée réduite	255
Distribution du Khi-deux	256

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 : STATISTIQUE À UNE VARIABLE 5

1. Généralités	5
2. Présentation des séries à une variable	6
3. Analyse statistique (moments)	15
TP 1 Médianes, moyenne	21
TP 2 Regroupement par classe	24
TP 3 Caractère continu	27
TP 4 Intervalles $[m-\sigma, m+\sigma]$ et $[m-2\sigma, m+2\sigma]$	30
Variable statistique quasi-normale	30
<i>Exercices sur le chapitre 1</i>	37

CHAPITRE 2 : STATISTIQUE À DEUX VARIABLES 41

1. Représentation graphique, nuages de points ..	41
2. Ajustements affines ou non affines	42
3. Corrélation linéaire	47
4. Droite d'allométrie	49
TP 1 Droite de Mayer ; méthode des moindres carrés	51
TP 2 Méthodes des moindres carrés ; Validation	53
TP 3 Ajustement à l'aide d'un changement d'échelle	55
TP 4 Variables statistiques quasi-normales à 2 modes. Droite de Henry. Ajustement ..	57
TP 5 Approximations affines de paramètres dans des équations de la physique	63
TP 6 Série chronologique	67
<i>Exercices sur le chapitre 2</i>	69

CHAPITRE 3 : PROBABILITÉS SUR LES ENSEMBLES FINIS 72

1. Introduction	72
2. Opérations sur les événements	73
3. Axiomes des probabilités	74
4. Exemples de probabilités	77
5. Probabilités conditionnelles. Propriétés. Probabilité d'un produit Formule de Bayes ..	78
6. Événements indépendants	83
7. Dénombrements (combinaisons, ...)	85
TP 1 Mise en œuvre des axiomes dans les jeux	89
TP 2 Épreuves composées par des schémas de tirage	96
TP 3 Dénombrements. Formule du binôme ..	98
<i>Exercices sur le chapitre 3</i>	103

CHAPITRE 4 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES 108

1. Généralités	108
2. Définition et exemples de lois de probabilité, valeurs caractéristiques	108
3. Variables discrètes à valeurs dans \mathbb{R}^2	117
4. Exemples de variables discrètes infinies ...	124
TP 1 Variable associée à des tirages ou des jeux	127
TP 2 Exemples classiques de variables aléatoires discrètes	129

TP 3 Variables infinies, intervention de séries	134
TP 4 Variables finies à valeurs couples	139
TP 5 Variables marginales indépendantes, somme de variables binomiales ou Poisson	142
<i>Exercices sur le chapitre 4</i>	146

CHAPITRE 5 : VARIABLES ALÉATOIRES ABSOLUMENT CONTINUES 151

1. Définitions (densité, fonction de répartition)	151
2. Valeurs caractéristiques (moments)	154
3. Exemples classiques de variables aléatoires ..	155
4. <i>Convergence et approximation de V.A.</i>	161
TP 1 Détermination de densités	167
TP 2 Utilisation de la variable normale	170
TP 3 Moments. Inégalité de Tchébichev ..	173
TP 4 Ajustement à une loi normale	176
<i>Exercices sur le chapitre 5</i>	179

CHAPITRE 6 : STATISTIQUE INFÉRENTIELLE 183

1. Généralités sur l'échantillonnage	183
2. Estimation d'une moyenne	184
3. Estimation d'un pourcentage	194
4. Tests d'hypothèses (comparaisons)	196
5. Comparaison. Définition du « Khi-deux » ..	207
TP 1 Estimation ponctuelle	212
TP 2 Distribution d'échantillonnage d'un pourcentage	213
TP 3 Intervalle de confiance d'une moyenne	214
TP 4 Risques d'erreurs dans les tests	215
TP 5 Comparaison. À une valeur standard	217
TP 6 Ajustement et test du χ^2	218
TP 7 et 8 Comparaison de moyennes, de fréquences	221
<i>Exercices sur le chapitre 6</i>	223

CHAPITRE 7 : FIABILITÉ 228

1. Introduction	228
2. Généralités. Terminologie	228
3. La loi exponentielle	232
4. La loi de Weibull	234
5. Fiabilité d'un système et de ses composants ..	240
TP 1 Utilisation de la loi de Weibull	244
TP 2 Loi de Weibull et loi normale	246
TP 3 Loi exponentielle et loi de Weibull ...	249
<i>Exercices sur la chapitre 7</i>	252

TABLES NUMÉRIQUES

Distribution de Poisson	254
Paramètres A et B des moments de la loi de Weibull	254
Loi normale centrée réduite	255
Distribution du Khi-deux	256

Cet ouvrage constitue le troisième tome de la collection intitulée "MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES". Cette collection est résolument tournée vers les applications des mathématiques aux sciences. Elle privilégie, à cet effet, la compréhension des outils mathématiques et les principes de leur mise en œuvre dans la résolution de problèmes réels.

Ce volume est consacré principalement aux premières notions de probabilité et à ses applications aux statistiques inférentielles. Il peut facilement être accessible aux étudiants de niveau "Bac + 1", sous réserve de connaître les notions élémentaires d'analyse mathématique, notions présentes dans la plupart des programmes des premiers cycles de l'enseignement supérieur, des classes préparatoires, du CNAM, des sections de Techniciens Supérieurs, des sections d'IUT.

Le cours, assez détaillé, amorcé souvent par des exemples simples et concrets, dégage les outils et les méthodes de base, sans privilégier une trop grande technicité mathématique. Les applications technologiques ou tertiaires ont été choisies de manière à balayer un large spectre de disciplines intervenant dans bon nombre de domaines de l'industrie, de la gestion, du commerce.

L'assimilation du cours est facilitée par des "Travaux Pratiques", problèmes résolus de façon très détaillée et contenant soit des exercices de mise en œuvre de notions exposées dans le cours, soit, dans le cadre d'applications technologiques industrielles ou tertiaires, des présentations de situations réelles rencontrées couramment dans la pratique.