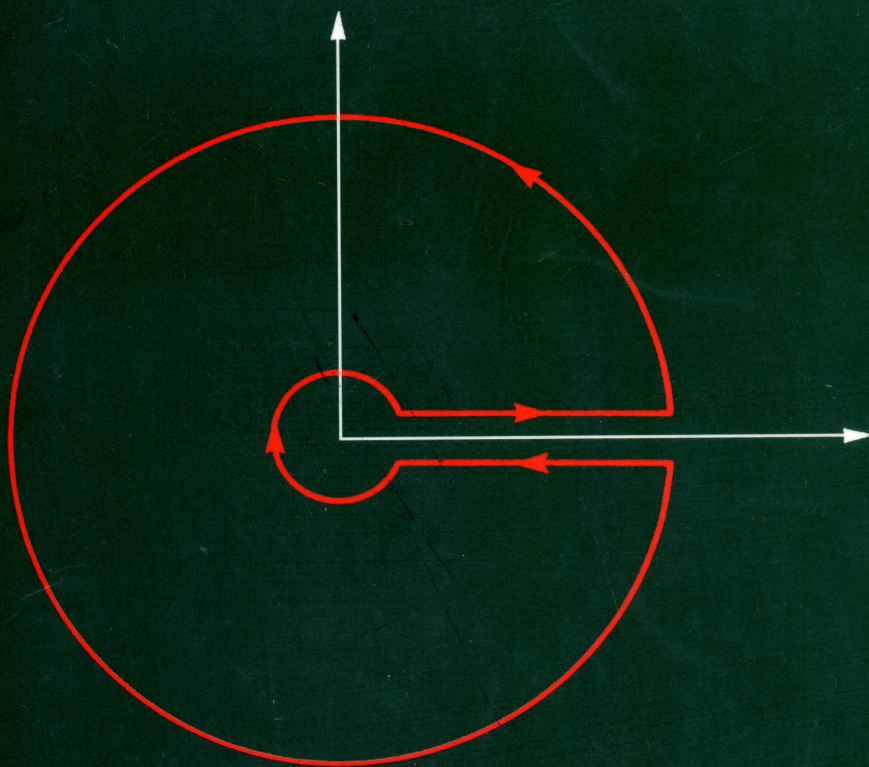


# Cours d'Analyse

## 2 Analyse complexe

Srishti D. Chatterji



M420/Te

M420/Te

# Cours d'Analyse

## 2 Analyse complexe

Srishti D. Chatterji

17540 1/2



# Table des matières

CONVENTIONS, NOTATIONS ET RAPPELS .....	1
1    Ensembles et fonctions .....	1
2    Nombres réels .....	3
3    Cardinalité .....	5
4    Quelques fonctions réelles .....	6
5    Intégration .....	6
6    Conventions diverses .....	8
7    Notations spécifiques .....	8
CHAPITRE 1  PLAN COMPLEXE ET HOLOMORPHIE	
1.1  Introduction .....	9
1.2  Les nombres complexes $\mathbb{C}$ .....	9
1.2.1  Définition .....	9
1.2.2  Notations et formules de base .....	10
1.2.3  Représentation polaire .....	11
1.2.4  Inégalité de Cauchy-Schwarz .....	15
1.2.5  Quelques remarques géométriques .....	16
1.2.6  Remarques .....	19
1.2.7  Exercices .....	21
1.3  Topologie de $\mathbb{C}$ .....	24
1.3.1  Preliminaires .....	24
1.3.2  Ensembles ouverts .....	24
1.3.3  Définitions .....	25
1.3.4  Limite, continuité .....	26
1.3.5  Exercices .....	28
1.4  Compacité, connexité .....	30
1.4.1  Compacité .....	30
1.4.2  Connexité .....	31
1.5  Dérivabilité .....	32
1.5.1 $\mathbb{C}$ -dérivabilité .....	32
1.5.2  Remarques .....	33
1.5.3  Propriétés élémentaires .....	33
1.5.4  Fonctions composées .....	35

1.5.5	Exemples .....	35
1.5.6	Equation de Cauchy–Riemann .....	36
1.5.7	Remarques .....	38
1.5.8	Exemples .....	39
1.5.9	Une reformulation .....	40
1.5.10	Fonctions holomorphes constantes .....	42
1.5.11	Exercices .....	43
<b>CHAPITRE 2 FONCTIONS HOLOMORPHES DÉFINIES PAR DES SÉRIES ENTIÈRES</b>		
2.1	Introduction .....	47
2.2	Séries de nombres complexes .....	47
2.2.1	Préliminaires .....	47
2.2.2	Limite supérieure, limite inférieure des suites réelles .....	50
2.2.3	Sommes positives .....	53
2.2.4	Sommes complexes .....	55
2.2.5	Théorème de Fubini pour les sommes .....	60
2.2.6	Remarques .....	62
2.2.7	Critères de convergence absolue .....	63
2.2.8	Convergence des séries .....	65
2.2.9	Différence entre convergence et convergence absolue .....	68
2.2.10	Exercices .....	71
2.3	Séries de fonctions complexes .....	81
2.3.1	Introduction .....	81
2.3.2	Convergence uniforme .....	82
2.3.3	Proposition .....	83
2.3.4	Proposition .....	85
2.3.5	Remarques .....	85
2.3.6	Exercices .....	87
2.4	Séries entières .....	88
2.4.1	Introduction .....	88
2.4.2	Proposition .....	88
2.4.3	Proposition .....	91
2.4.4	Corollaire .....	93
2.4.5	Remarques .....	93
2.4.6	Unicité des séries entières .....	94

2.5	Les fonctions élémentaires.....	94
2.5.1	Introduction.....	94
2.5.2	Fonction exponentielle.....	95
2.5.3	Fonctions trigonométriques.....	96
2.5.4	La périodicité des fonctions exponentielle, sinus et cosinus.....	98
2.5.5	Les zéros des fonctions sinus et cosinus.....	100
2.5.6	Formules trigonométriques.....	100
2.5.7	Fonctions hyperboliques.....	102
2.5.8	La détermination principale ( $\ln$ ) de la fonction logarithmique.....	103
2.5.9	Quelques propriétés de $\ln$ .....	105
2.5.10	L'expression $z^\alpha$ .....	106
2.5.11	La fonction argument.....	108
2.6	Exercices.....	112

### CHAPITRE 3 FORMULE INTÉGRALE DE CAUCHY

3.1	Introduction.....	121
X 3.2	Fonctions complexes d'une variable réelle.....	121
3.2.1	Préliminaires.....	121
3.2.2	Règles de dérivation.....	122
3.2.3	Règles d'intégration.....	123
3.3	Intégrales curvilignes.....	126
3.3.1	Définitions.....	126
X 3.3.2	Quelques propriétés des intégrales curvilignes	127
3.3.3	Deux calculs.....	131
3.3.4	Exemples.....	133
3.3.5	Conventions.....	135
3.3.6	Exercices.....	135
X 3.4	Théorème de Cauchy.....	138
3.4.1	Introduction.....	138
3.4.2	Intégrales curvilignes réelles.....	139
3.4.3	Théorème de Green.....	140
3.4.4	Proposition ( <i>théorème de Cauchy</i> ).....	142
3.4.5	Proposition ( <i>formule de Cauchy</i> ).....	143
3.4.6	Proposition ( <i>dérivation des intégrales</i> ).....	145

	3.4.7	Proposition ( <i>formule de Cauchy pour les dérivées supérieures</i> )	14
		<del>3.4.8 Proposition (<i>série de Taylor</i>)</del>	<del>148</del>
	3.5	Théorème de Goursat	150
	3.5.1	Proposition	150
	3.5.2	Existence des primitives	152
	3.5.3	Continuité de $f'$	153
X	3.5.4	Primitive locale	154
	3.5.5	Théorème de Morera	154
	3.6	Développement de Laurent	155
	3.6.1	Série de Laurent	155
	3.6.2	Proposition ( <i>développement de Laurent</i> )	157
	3.6.3	Singularités isolées	160
	3.6.4	Proposition ( <i>inégalités de Cauchy</i> )	161
	3.6.5	Proposition ( <i>critère de singularité artificielle</i> )	161
	3.6.6	Proposition ( <i>critère pour pôle et singularité essentielle</i> )	162
X	3.6.7	Méthodes pour le calcul des résidus	164
	3.7	Quelques exemples	166
	3.7.1	Exemples de séries de Taylor	166
	3.7.2	D'autres exemples de séries de Taylor	167
	3.7.3	Nombres de Bernoulli	169
	3.7.4	Exemples simples de calcul des résidus et des intégrales	171
	3.7.5	Séries de Laurent	173
	3.7.6	Fonctions de Bessel	175
	3.7.7	Fonctions génératrices	178
	3.7.8	Polynômes d'Hermite	181
	3.7.9	Polynômes de Legendre	184
	3.8	Exercices	185
X	3.9	Commentaires sur les formules de Cauchy	195
	3.9.1	Généralisation des formules intégrales	195
	3.9.2	Remarques historiques	198
CHAPITRE 4 THÉORÈME DES RÉSIDUS ET SES APPLICATIONS			
	4.1	Introduction	201
	4.2	Théorème principal	201
X	4.2.1	Proposition ( <i>théorème des résidus</i> )	201
	4.2.2	Conventions	202

X 4.3	Calcul des intégrales .....	202
4.3.1	Intégrales du type $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ .....	203
4.3.2	Intégrales du type $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .....	205
4.3.3	Les intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx$ , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ .....	208
4.3.4	Calcul de $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .....	212
4.3.5	Intégrales obtenues à partir de l'intégration de $e^{-z^2}$ .....	214
4.3.6	Intégrales du type $\int_0^{\infty} x^{a-1} \varphi(x) dx$ .....	217
4.3.7	Exercices .....	222
4.4	Formules sommatoires .....	225
4.4.1	La somme $f(m) + \dots + f(n)$ .....	225
4.4.2	La somme $\sum (-1)^\nu f(\nu)$ .....	228
4.4.3	Calcul de $\zeta(2k)$ .....	229
4.5	Développement des fonctions méromorphes .....	231
4.5.1	Définition .....	231
4.5.2	Remarque .....	232
4.5.3	Méthode générale .....	233
4.5.4	Exemples .....	235
4.6	Nombre de pôles et de zéros .....	238
4.6.1	Terminologie .....	238
4.6.2	Calcul de $I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz$ .....	238
4.6.3	Remarques .....	239
4.6.4	Théorème fondamental de l'algèbre .....	240
4.6.5	Théorème de Rouché .....	241
4.6.6	Quelques applications du théorème de Rouché .....	243
4.7	Exercices .....	245
4.8	Commentaires .....	247
CHAPITRE 5 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS HOLOMORPHES		
5.1	Introduction .....	249

5.2	Détermination globale des fonctions holomorphes . . . .	249
5.2.1	Généralités . . . . .	249
5.2.2	Proposition . . . . .	250
5.2.3	Corollaire ( <i>principe d'identité des fonctions holomorphes</i> ) . . . . .	251
5.2.4	Remarques . . . . .	251
5.2.5	Prolongement analytique . . . . .	252
5.2.6	Exhaustion compacte . . . . .	253
5.2.7	Ensembles discrets . . . . .	254
5.2.8	Dénombrabilité des zéros et des pôles . . . . .	256
5.3	Théorème de Liouville et ses généralisations . . . . .	257
5.3.1	Introduction . . . . .	257
5.3.2	Proposition ( <i>théorème de Liouville</i> ) . . . . .	257
5.3.3	Proposition . . . . .	257
5.3.4	Caractérisation des fonctions rationnelles . . . .	258
5.3.5	Remarques . . . . .	260
5.3.6	Fonctions doublement périodiques . . . . .	260
5.4	Principe du maximum . . . . .	262
5.4.1	Proposition ( <i>propriété de la moyenne</i> ) . . . . .	263
5.4.2	Proposition ( <i>principe du maximum</i> ) . . . . .	263
5.4.3	Corollaire ( <i>principe du maximum bis</i> ) . . . . .	264
5.4.4	Corollaire ( <i>principe du minimum</i> ) . . . . .	265
5.4.5	Corollaire ( <i>principe du minimum bis</i> ) . . . . .	265
5.4.6	Commentaires . . . . .	266
5.5	Applications ouvertes . . . . .	266
5.5.1	Préliminaires . . . . .	266
5.5.2	Proposition . . . . .	267
5.5.3	Commentaires . . . . .	269
5.6	Domaines élémentaires . . . . .	270
5.6.1	Préliminaires . . . . .	270
5.6.2	Proposition . . . . .	270
5.6.3	Proposition . . . . .	271
5.6.4	Remarques . . . . .	272
5.6.5	Quelques résultats valables dans les domaines élémentaires . . . . .	272
5.7	Fonctions harmoniques . . . . .	274
5.7.1	Introduction . . . . .	274
5.7.2	Proposition . . . . .	275

5.7.3	Propriétés des fonctions harmoniques .....	276
5.7.4	Commentaires .....	279
5.7.5	Formules intégrales de Poisson .....	280
5.7.6	Proposition ( <i>théorème de Schwarz</i> ) .....	283
5.7.7	Caractérisation des fonctions harmoniques par la propriété de la moyenne .....	285
5.7.8	Formule de Jensen, fonctions sous-harmoniques .....	286
5.8	Convergence des fonctions holomorphes .....	288
5.8.1	Introduction .....	288
5.8.2	Convergence uniforme locale .....	288
5.8.3	Proposition .....	288
5.8.4	Proposition .....	289
5.8.5	Convergence normale locale .....	290
5.8.6	Proposition .....	291
5.8.7	Proposition ( <i>théorème de Hurwitz</i> ) .....	292
5.8.8	Proposition ( <i>théorème d'injectivité</i> ) .....	293
5.8.9	Proposition .....	293
5.8.10	Convergence des fonctions méromorphes .....	294
5.9	Logarithme continu des fonctions .....	296
5.9.1	Introduction .....	296
5.9.2	Quelques remarques utiles .....	296
5.9.3	Lemme .....	298
5.9.4	Ensembles contractiles .....	299
5.9.5	Proposition .....	299
5.9.6	Commentaires .....	300
5.10	Exercices .....	301

## CHAPITRE 6 DIVERSES REPRÉSENTATIONS DES FONCTIONS HOLOMORPHES

6.1	Introduction .....	313
6.2	Représentation par des séries entières .....	313
6.2.1	Préliminaires concernant les prolongements analytiques .....	313
6.2.2	Points singuliers sur le cercle de convergence .	314
6.2.3	Proposition .....	315
6.2.4	Un exemple de non-prolongeabilité analytique	316
6.2.5	Théorème d'Abel .....	317
6.2.6	Proposition ( <i>théorème de Tauber</i> ) .....	321

6.2.7	Le caractère multiforme de certains prolongements analytiques .....	322
6.2.8	Généralités sur les points réguliers et singuliers .....	325
6.3	Représentation par des intégrales .....	326
6.3.1	Préliminaires .....	326
6.3.2	Proposition .....	327
6.3.3	Corollaire .....	329
6.3.4	Quelques exemples .....	330
6.3.5	Remarques .....	334
6.3.6	Prolongement analytique de la fonction gamma .....	335
6.3.7	Interchangeabilité de l'intégrale et de la somme .....	337
6.3.8	Autres méthodes pour le prolongement analytique de $\Gamma(z)$ .....	339
6.3.9	Commentaires (continuation du paragraphe 6.3.5) .....	343
6.4	Produits infinis .....	344
6.4.1	Préliminaires .....	344
6.4.2	Les produits $\prod_n (1 \pm b_n)$ , $b_n \geq 0$ .....	346
6.4.3	Convergence absolue des produits .....	348
6.4.4	Proposition .....	349
6.4.5	Produit infini de fonctions .....	353
6.4.6	Dérivation logarithmique des produits .....	355
6.4.7	Le produit infini d'Euler pour $\sin \pi z$ .....	356
6.4.8	Les produits de Weierstrass .....	357
6.4.9	Commentaires .....	361
6.4.10	Proposition (Mittag-Leffler, 1877) .....	362
6.5	Étude de la fonction gamma .....	364
6.5.1	Préliminaires .....	364
6.5.2	Quelques formules .....	364
6.5.3	Caractérisation de $\Gamma(z)$ .....	367
6.5.4	Formule de Stirling .....	369
6.6	La fonction zêta de Riemann .....	375
6.6.1	Introduction .....	375
6.6.2	Prolongement analytique préliminaire de $\zeta$ ...	375

6.6.3	Polynômes de Bernoulli .....	377
6.6.4	Proposition ( <i>formule d'Euler-Maclaurin</i> ) ....	379
6.6.5	Prolongement analytique complet de la fonction zêta .....	381
6.6.6	Produit d'Euler pour $\zeta(s)$ .....	382
6.6.7	Commentaires sur la démonstration du théorème des nombres premiers .....	384
6.7	Exercices .....	388
6.8	Fractions continues .....	398
6.8.1	Préliminaires .....	398
6.8.2	Formules pour $A_n$ et $B_n$ .....	399
6.8.3	Autres formules de base .....	400
6.8.4	Fractions continues équivalentes .....	401
6.8.5	Série équivalente à une fraction continue ....	402
6.8.6	Convergence des fractions continues .....	403
6.8.7	Fractions continues avec des termes strictement positifs .....	404
6.8.8	Remarques sur la convergence des fractions continues générales .....	407
6.8.9	$\mathcal{K}(a : b)$ .....	408
6.8.10	Exemples de fractions continues équivalentes aux séries .....	412
6.8.11	Fractions continues régulières .....	414
6.8.12	Fractions continues analytiques .....	418
6.8.13	Remarques sur les fractions continues .....	422

## CHAPITRE 7 APPLICATIONS CONFORMES

7.1	Introduction .....	427
7.2	Conformité .....	427
7.2.1	Préliminaires .....	427
7.2.2	Proposition ( <i>conformité des applications holomorphes</i> ) .....	428
7.2.3	Proposition ( <i>théorème d'inversion locale holomorphe</i> ) .....	429
7.2.4	Remarques .....	431
7.2.5	Formulation du problème principal .....	432
7.3	Lemme de Schwarz et ses conséquences .....	434
7.3.1	Lemme de Schwarz .....	434
7.3.2	Proposition ( <i>théorème d'unicité des applications conformes sur <math>U</math></i> ) .....	435
7.3.3	Proposition ( <i>détermination de <math>\text{aut}(U)</math></i> ) .....	435

7.4	Applications homographiques .....	436
7.4.1	Préliminaires .....	436
7.4.2	Propriété géométrique des applications homographiques .....	439
7.4.3	Propriétés analytiques des fonctions homographiques .....	441
7.4.4	Fonctions homographiques et birapports .....	442
7.4.5	Applications conformes des demi-plans .....	445
7.4.6	Remarques .....	447
7.4.7	Fonctions homographiques et symétrie .....	449
7.4.8	Exercices .....	453
7.4.9	Remarques complémentaires .....	457
7.5	Quelques transformations élémentaires .....	459
7.5.1	Préliminaires .....	459
7.5.2	Les applications $z \mapsto z^\alpha$ .....	459
7.5.3	L'application $z \mapsto e^z$ .....	462
7.5.4	Les applications trigonométriques .....	463
7.5.5	Application de Joukowski .....	468
7.5.6	Exercices .....	472
7.6	Théorèmes de Darboux et de Montel .....	476
7.6.1	Introduction .....	476
7.6.2	Théorème de Darboux .....	477
7.6.3	Procédé diagonal de Cantor .....	479
7.6.4	Lemmes concernant des familles localement bornées .....	479
7.6.5	Lemme .....	481
7.6.6	Théorème de Montel .....	483
7.6.7	Critère de convergence de Montel .....	483
7.6.8	Remarques terminologiques .....	483
7.6.9	Théorème de Vitali .....	484
7.7	Théorème de Riemann .....	485
7.7.1	Préliminaires .....	485
7.7.2	Proposition ( <i>théorème de Riemann</i> ) .....	485
7.7.3	Remarques sur la démonstration du théorème de Riemann .....	487
7.7.4	Comportement d'une application conforme à la frontière .....	488

7.8	Simple connexité.....	488
7.8.1	Introduction.....	488
7.8.2	Généralisation de l'intégrale curviligne.....	489
7.8.3	Intégrale sur un lacet d'un type spécial.....	491
7.8.4	Homotopie.....	492
7.8.5	Proposition ( <i>version homotopique du théorème de Cauchy</i> ).....	492
7.8.6	Homotopie des lacets.....	493
7.8.7	Lemme.....	493
7.8.8	Proposition ( <i>équivalence entre les domaines élémentaires et les domaines simplement connexes</i> ).....	494
7.8.9	Remarques.....	495
7.9	Application conforme et problème de Dirichlet.....	495
7.9.1	Introduction.....	495
7.9.2	Une formule explicite.....	496
7.9.3	Solution du problème de Dirichlet en partant du théorème de Riemann.....	498
7.9.4	Déduction du théorème de Riemann à partir de la solution du problème de Dirichlet.....	498
7.10	Compléments.....	500
7.10.1	Transformation de Schwarz-Christoffel.....	501
7.10.2	Remarques.....	502
7.11	Exercices.....	504

## CHAPITRE 8 SURFACES DE RIEMANN

8.1	Introduction.....	507
8.2	Définitions générales.....	508
8.2.1	Espaces topologiques.....	508
8.2.2	Surfaces.....	509
8.2.3	Exemples de surfaces de Riemann.....	509
8.2.4	Applications holomorphes.....	511
8.2.5	Quelques propriétés des applications holomorphes.....	512
8.2.6	Fonctions méromorphes.....	512
8.2.7	Indice de ramification.....	512

8.3	Surface de Riemann associée à une fonction holomorphe .....	513
8.3.1	Germes holomorphes .....	513
8.3.2	Remarques .....	515
8.3.3	Quelques exemples .....	516
8.3.4	Compléments .....	517
8.4	Conclusion .....	518
	RÉPONSES AUX EXERCICES .....	519
	BIBLIOGRAPHIE .....	525
	INDEX .....	529

# Cours d'Analyse

## 2 Analyse complexe

Srishti D. Chatterji

L'objectif principal du second volume de ce Cours d'Analyse en trois volumes est de donner une introduction à la théorie classique des fonctions holomorphes d'une variable complexe.

Après une introduction aux nombres complexes et à la théorie des séries entières, on présente les fonctions holomorphes en utilisant les équations de Cauchy-Riemann et leurs développements en séries entières. Les théorèmes principaux de la théorie de Cauchy ainsi que leur utilisation pour l'étude des séries de Taylor et de Laurent sont présentés en détail. Les fonctions élémentaires ( $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  etc.) sont introduites dès le début et leurs propriétés sont développées en utilisant la théorie générale. Les propriétés principales des fonctions holomorphes (principe de module maximum, application ouverte, unicité des fonctions holomorphes, théorèmes de Weierstrass et Mittag-Leffler etc.) sont présentées et leur relation avec les fonctions harmoniques est développée. Quelques fonctions spéciales (comme  $\gamma$ ,  $\zeta$ ) sont introduites avec soin. Les applications conformes (y inclus le théorème de Riemann) sont traitées en détail. Une introduction à la théorie des fractions continues complexes est donnée comme illustration de différents modes de présentation des fonctions holomorphes (comme séries, intégrales ou produits infinis). Le livre termine avec une courte introduction rigoureuse aux surfaces de Riemann. De nombreux exercices (avec indications de leur résolution), notices historiques et bibliographiques complètent le texte. Il est conçu pour les étudiants en mathématiques et physique dans leur deuxième et troisième année d'études auprès d'une université européenne.

Après ses études à l'Université de Lucknow et à l'Indian Statistical Institute de Calcutta, **Srishti D. Chatterji** obtient son doctorat en statistiques mathématiques de la Michigan State University, E. Lansing, USA, en 1960.

Il est depuis 1970 professeur ordinaire de mathématiques à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne après avoir occupé divers postes d'enseignement et de recherche en Europe, en Amérique du Nord et en Australie. Ses recherches concernent différents domaines d'analyse liés à la théorie de l'intégration et des probabilités. Il s'intéresse tout particulièrement à l'histoire des mathématiques des 19<sup>e</sup> et 20<sup>e</sup> siècles et aux fondements de la physique théorique.

ISBN 2-88074-346-X



Presses polytechniques et universitaires romandes