

exercices de
probabilités

licence
maîtrise
écoles
d'ingénieurs

Marie Cottrell
Valentine Genon-Catalot
Christian Duhamel
Thierry Meyre

C A S S I N I

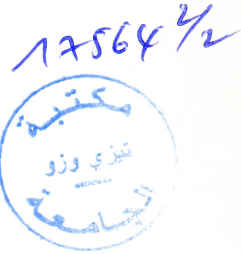
M 478

M 418

MARIE COTTRELL VALENTINE GENON-CATALOT
CHRISTIAN DUHAMEL THIERRY MEYRE

Exercices de Probabilités

Licence – Maîtrise – Écoles d'ingénieurs



CASSINI

Table des matières



Préface	XIII
Préface de la première édition	XV
Avant-propos	XVII
Chapitre 1. Probabilités sur un ensemble fini	
1.1. Expérience aléatoire. Épreuves	1
1.2. Événements aléatoires. Tribus	1
1.3. Probabilités	2
Probabilités conditionnelles. Événements indépendants	2
Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable	3
Probabilité uniforme sur une partie de \mathbb{R}^k	3
1.4. Variables aléatoires	4
1.5. Appendice. Introduction aux marches aléatoires	4
Exercice 1.1. Trois dés	5
Exercice 1.2. Des livres sur une étagère	6
Exercice 1.3. Conditionnement	7
Exercice 1.4. Indépendance	8
Exercice 1.5. Fonction d'Euler	8
Exercice 1.6. Un parapluie conditionné	10
Exercice 1.7. Formule de Bayes	11
Exercice 1.8. Cherchez l'erreur	11
Exercice 1.9. Où l'on voit comment se transmet l'information	13
Exercice 1.10. Indépendance conditionnelle	14
Exercice 1.11. Loi de succession de Laplace	14
Exercice 1.12. Taux de panne	16
Exercice 1.13. Théorème du scrutin	18
Exercice 1.14. Retours en zéro	21
Chapitre 2. Variables aléatoires. Loïs de probabilité	
2.1. Limite supérieure, limite inférieure d'une suite d'événements	25
2.2. Indépendance d'une famille de tribus	25
2.3. Théorèmes d'existence et d'unicité	25
2.4. Variables aléatoires. Tribus engendrées	27
2.5. Loi de probabilité. Espérance	28

2.6. Moments des variables aléatoires réelles	28
2.7. Fonctions de répartition	29
2.8. Lois marginales	30
2.9. Indépendance des v.a.	31
2.10. Égalité P-presque sûrement	32
Exercice 2.1. Tribus indépendantes	32
Exercice 2.2. Indice aléatoire	32
Exercice 2.3. Variables aléatoires X-mesurables	33
Exercice 2.4. Variable aléatoire p.s. constante	34
Exercice 2.5. Borne supérieure essentielle	34
Exercice 2.6. Atomes d'un espace probabilisé	35
Exercice 2.7. Exemple de mesure invariante	36
Exercice 2.8. Estimateurs de la moyenne et de la variance	39
Exercice 2.9. Espérance d'une v.a. à valeurs entières ou réelles positives	41
Exercice 2.10. Binomiale négative	41
Exercice 2.11. Probabilité d'une réunion finie d'ensembles	43
Exercice 2.12. Rencontre	45
Exercice 2.13. Temps d'arrêt	47
Exercice 2.14. Calculs de lois	49
Exercice 2.15. Loi de Cauchy et convolution	51
Exercice 2.16. Égalisation	53
Exercice 2.17. Statistiques d'ordre	53
Exercice 2.18. Simulation	57
Exercice 2.19. Loi de $F(X)$	58
Exercice 2.20. Loi non absolument continue. Distribution de Cantor	59

Chapitre 3. Lois discrètes, fonctions génératrices. Lois uniforme et exponentielle

3.1. Variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}	63
Lois usuelles	63
Fonctions génératrices. Calcul des moments	64
3.2. Variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}	64
Lois à densité (lois absolument continues) usuelles	64
Statistiques d'ordre d'un n -échantillon de loi continue	64
Exercice 3.1. Fonction génératrice de v.a. binomiale et de Poisson	65
Exercice 3.2. Dés truqués	67
Exercice 3.3. Loi binomiale négative	68
Exercice 3.4. Somme aléatoire de variables aléatoires	69
Exercice 3.5. Processus de branchement	72
Exercice 3.6. Loi triangulaire	74

Exercice 3.7. Statistiques d'ordre de v.a. uniformes	76
Exercice 3.8. Somme de deux v.a. exponentielles de paramètres distincts	78
Exercice 3.9. Temps d'attente en parallèle ou statistiques d'ordre de v.a. exponentielles	79
Exercice 3.10. Exemple de temps d'attente en parallèle	80
Exercice 3.11. Lois gamma, bêta, χ^2	82
Exercice 3.12. Première valeur record	87
Exercice 3.13. Théorème de La Palice	89
Exercice 3.14. Variables amnésiques	91
Exercice 3.15. Files d'attente	92
Exercice 3.16. Estimation de la durée de vie (moyenne) d'une ampoule électrique	94
Exercice 3.17. Instants d'arrivée avant le n -ième	97
Exercice 3.18. Paradoxe de l'autobus	98
Exercice 3.19. Indépendance	101

Chapitre 4. Convergence en loi

4.1. Convergence faible des probabilités	103
4.2. Convergence en loi des v.a.	103
4.3. Suite tendue	104
4.4. Fonctions caractéristiques	104
4.5. Propriétés des fonctions caractéristiques	104
4.6. Fonction caractéristique des lois usuelles. Loi normale	106
4.7. Seconde fonction caractéristique	106
4.8. Théorème limite central	106
Exercice 4.1. Convergence en loi et arithmétique	107
Exercice 4.2. Convergence des fonctions de répartition	108
Exercice 4.3. Convergence faible des mesures de Dirac	109
Exercice 4.4. Convergence faible pour des probabilités sur \mathbb{N}	110
Exercice 4.5. Théorème de Scheffé	110
Exercice 4.6. Probabilité d'un intervalle	111
Exercice 4.7. Suite tendue	113
Exercice 4.8. Théorèmes de Helly et de Prohorov	114
Exercice 4.9. Théorème de Lévy (suite de l'exercice précédent)	117
Exercice 4.10. Fonction caractéristique d'une v.a. discrète	118
Exercice 4.11. Fonctions caractéristiques des lois discrètes usuelles	119
Exercice 4.12. Fonctions caractéristiques des lois continues usuelles	121
Exercice 4.13. Somme d'un nombre aléatoire de v.a.	124
Exercice 4.14. Loi de Cauchy	125
Exercice 4.15. Une application non probabiliste du théorème limite central	127

Exercice 4.16. Erreurs d'arrondi	127
Exercice 4.17. Caractérisation de la loi normale	128
Exercice 4.18. Théorème limite central pour une somme d'un nombre aléatoire de v.a. indépendantes équadistribuées	129
Exercice 4.19. Convergence en loi de la médiane d'un échantillon	131
Exercice 4.20. Convergence en loi et types des variables aléatoires	132
Exercice 4.21. Lois indéfiniment divisibles	134
Exercice 4.22. Stabilité	138
Exercice 4.23. Extrêmes	140
Exercice 4.24. Caractérisation des fonctions caractéristiques (théorème de Bochner)	143

Chapitre 5. Convergences

5.1. Inégalités	147
5.2. Différentes sortes de convergence	147
5.3. Événements asymptotiques. Lemme de Borel-Cantelli	149
5.4. Transformée de Laplace	149
Exercice 5.1. Lim sup	150
Exercice 5.2. Retours à zéro	151
Exercice 5.3. Séries de v.a. indépendantes	151
Exercice 5.4. Loi 0-1 et espérance	151
Exercice 5.5. Loi forte des grands nombres. Théorème de Cantelli	153
Exercice 5.6. Non-équivalence des diverses convergences	154
Exercice 5.7. Somme et produit	155
Exercice 5.8. Convergence de sommes de v.a. indépendantes	156
Exercice 5.9. Loi forte des grands nombres	156
Exercice 5.10. Une série	158
Exercice 5.11. Une minoration	158
Exercice 5.12. Théorèmes d'analyse	159
Exercice 5.13. Transformée de Laplace	162
Exercice 5.14. Théorème de Chernoff	163

Chapitre 6. Espérances conditionnelles

6.1. Espérance conditionnelle d'une v.a. intégrable	169
Cas général	169
Exemples importants	170
Propriétés générales des espérances conditionnelles	171
6.2. L'espérance conditionnelle comme projecteur	172
6.3. Version régulière	173
6.4. Cas gaussien	174

Exercice 6.1. Loi binomiale, loi de Poisson	174
Exercice 6.2. Conditionnement par une v.a. discrète	176
Exercice 6.3. Exemple de conditionnement par une v.a. discrète	177
Exercice 6.4. Dérivée usuelle et dérivée de Radon-Nikodym	179
Exercice 6.5. Conditionnement par le sup de deux tribus	179
Exercice 6.6. Loi conditionnelle du minimum sachant le maximum	181
Exercice 6.7. Partition engendrée par les statistiques d'ordre	182
Exercice 6.8. Exemple de loi conditionnelle sans densité	185
Exercice 6.9. Conditionnement par les statistiques d'ordre	188
Exercice 6.10. Variance et covariance conditionnelles	190
Exercice 6.11. Somme d'un nombre aléatoire de v.a.r.	191
Exercice 6.12. Indépendance et conditionnement	192
Exercice 6.13. Densités conditionnelles	193
Exercice 6.14. Théorème de Fubini et espérance conditionnelle	195
Exercice 6.15. Version régulière	197
 Chapitre 7. Variables et vecteurs gaussiens	
7.1. Généralités sur les vecteurs aléatoires	199
7.2. Vecteurs gaussiens (ou normaux)	201
Exercice 7.1. Orthogonalité et indépendance	203
Exercice 7.2. Indépendance de deux combinaisons linéaires de gaussiennes indépendantes	204
Exercice 7.3. Indépendance mutuelle	204
Exercice 7.4. Vecteur gaussien standard. Forme canonique	205
Exercice 7.5. Évaluation de la queue de la distribution normale	207
Exercice 7.6. Une caractérisation de la loi normale	209
Exercice 7.7. C.N.S. d'indépendance de \bar{X} et S^2	211
Exercice 7.8. Loi du χ^2	214
Exercice 7.9. Loi du χ'^2	215
Exercice 7.10. Convergence de la loi multinomiale	216
Exercice 7.11. Théorème de Cochran	219
Exercice 7.12. Analyse de la variance à un facteur	221
Exercice 7.13. Convergence en loi de variables gaussiennes	224
Exercice 7.14. Coefficient de corrélation linéaire et rapport de corrélation	225
Exercice 7.15. Espérance conditionnelle pour un vecteur gaussien	228
Exercice 7.16. Suite gaussienne markovienne	229
Exercice 7.17. Estimateurs bayesiens	232

Chapitre 8. Martingales à temps discret

8.1. Définitions : sous-martingales, martingales, surmartingales . . .	237
8.2. Martingales de carré intégrable	238
8.3. Temps d'arrêt. Échantillonnage des martingales	238
8.4. Théorèmes de convergence forts. Équintégrabilité. Loi forte des grands nombres	239
Exercice 8.1. Changement de tribus	240
Exercice 8.2. Exemples de martingales	241
Exercice 8.3. Stratégies. Processus arrêté	241
Exercice 8.4. Décomposition de Doob	243
Exercice 8.5. Martingale équadistribuée	244
Exercice 8.6. Applications de l'inégalité de Jensen	245
Exercice 8.7. Exemples	245
Exercice 8.8. Identité de Wald. Franchissement de barrières	247
Exercice 8.9. Marches aléatoires. Arrêtez si vous gagnez	249
Exercice 8.10. Convergence pour des martingales de L^2	251
Exercice 8.11. Théorème des trois séries (condition suffisante)	253
Exercice 8.12. Ensemble de convergence d'une martingale	254
Exercice 8.13. Marche aléatoire de Bernoulli	255
Exercice 8.14. Équintégrabilité et suite des espérances conditionnelles	256
Exercice 8.15. Théorème de Radon-Nikodym	257
Exercice 8.16. Loi du logarithme itéré	259

Chapitre 9. Chaînes de Markov

9.1. Définition. Propriété de Markov	265
9.2. Décomposition de l'espace des états	267
9.3. Distribution stationnaire	268
9.4. Convergence vers la distribution stationnaire	269
Exercice 9.1. Dépenses énergétiques	269
Exercice 9.2. Comment démontrer qu'une suite est une chaîne de Markov	271
Exercice 9.3. Marche aléatoire	272
Exercice 9.4. Bruit qui court	272
Exercice 9.5. Loi du temps de séjour en un état	273
Exercice 9.6. Étude de ρ_{xy}	274
Exercice 9.7. Probabilités d'absorption	275
Exercice 9.8. File d'attente	278
Exercice 9.9. Marches aléatoires dans \mathbb{Z}^k	280
Exercice 9.10. Un critère de récurrence	283
Exercice 9.11. File d'attente : application de l'exercice 9.10	285

Exercice 9.12. Chaîne à deux états	286
Exercice 9.13. Chaînes d'Ehrenfest	288
Exercice 9.14. Le Monopoly	292
Exercice 9.15. Probabilités stationnaires d'une chaîne non irréductible	295
Exercice 9.16. Chaîne de naissance et de mort	296
Exercice 9.17. "I should've quit when I was ahead" : application de l'exercice précédent	299
Exercice 9.18. Longueur de la suite de succès	299
Exercice 9.19. Exemples d'application de la propriété de Markov faible	302
Exercice 9.20. Propriété de Markov forte	303
Exercice 9.21. Convergence de martingale	305
Exercice 9.22. Martingales: temps de sortie	307

Annexe. Théorie de la mesure

A.1. Tribus	311
A.2. Applications mesurables	312
A.3. Mesures	313
A.4. Intégration des v.a.r.	315
A.5. Espaces L^p	318

Bibliographie	319
----------------------	-----

Notations	321
------------------	-----

Index	323
--------------	-----