

J. GENET et G. PUPION

---

analyse résumés  
de cours  
et exercices  
corrigés  
moderne 2

---

premier cycle universitaire  
classes préparatoires aux grandes écoles

---

variable complexe

calcul différentiel et intégral

fonctions de plusieurs variables

VUIBERT UNIVERSITE

M4017

# analyse moderne

résumé de cours et exercices corrigés

par

J. Genet

et

G. Pupion

M.

agrégé de l'Université,  
docteur ès sciences mathématiques,  
professeur à  
l'Université de Pau

agrégé de l'Université,  
docteur ès sciences mathématiques,  
professeur à  
l'Université de Bordeaux

M40 (4<sup>e</sup>)

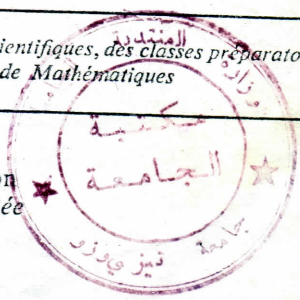
## TOME 2

fonctions d'une variable complexe  
intégration  
calcul différentiel  
équations aux dérivées partielles

مكتبة  
المتابعة  
11-456-6  
108613

à l'usage des étudiants du 1<sup>er</sup> Cycle des Universités scientifiques, des classes préparatoires  
aux grandes Écoles et de la licence de Mathématiques

Deuxième édition  
revue et augmentée



4253 3/5

LIBRAIRIE VUIBERT  
Boulevard Saint-Germain, 63  
75005 - PARIS

## TABLE DES MATIÈRES

1.	INTÉGRALES DE RIEMANN IMPROPRES .....	11
	I. — Généralités.....	11
	II. — Propriétés des intégrales impropres .....	13
	III. — Critères de convergence pour $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ .....	15
	IV. — Critères de convergence pour $\int_a^{-b} f(x)dx$ .....	17
	Énoncés des exercices .....	19
	Solutions .....	26
2.	FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE. FONCTIONS HOLOMORPHES	53
	I. — Fonctions d'une variable complexe .....	53
	II. — Fonctions holomorphes .....	54
	III. — Développement en série de Laurent. ....	56
	IV. — Propriétés diverses .....	59
	Énoncés des exercices .....	61
	Solutions .....	65
3.	INTÉGRATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES. THÉORÈMES DE CAUCHY ET DES RÉSIDUS .....	95
	I. — Définitions diverses .....	95
	II. — Intégrale $\int_{AB} f(z)dz$ .....	97
	III. — Théorème de Cauchy .....	99
	IV. — Théorème des résidus .....	101
	Énoncés des exercices .....	104
	Solutions .....	109
4.	FORMULES INTÉGRALES DE CAUCHY. APPLICATIONS. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HOLOMORPHES.....	133
	I. — Formules de Cauchy.....	133
	II. — Propriétés des fonctions holomorphes .....	134
	Énoncé des exercices .....	137
	Solutions .....	140
5.	EXEMPLES DE FONCTIONS MULTIFORMES .....	153
	I. — Introduction. Fonction réciproque de $z \mapsto Z = z^2$ ..	153
	II. — Fonction $z \mapsto Lz$ et $z \mapsto \text{Log } z$ .....	155
	III. — Fonction $z \mapsto z^\alpha$ , $\alpha$ réel .....	157
	IV. — Extensions diverses .....	157

Énoncés des exercices .....	159
Solutions .....	162
6. INTÉGRALES MULTIPLES SUR DES DOMAINES BORNÉS. MÉTHODE DE RIEMANN .....	173
A) Intégrales doubles .....	173
I. — Fonctions intégrables sur un ouvert borné $\Delta$ .....	173
II. — Propriétés des fonctions intégrables .....	175
III. — Méthode d'intégration. Théorème de Fubini .....	176
IV. — Changement de variable .....	178
B) Intégrales triples .....	179
V. — Définition de $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$ .....	179
VI. — Calcul d'intégrales triples .....	180
Énoncés des exercices .....	182
Solutions .....	187
7. INTÉGRALES MULTIPLES. ÉTUDE GÉNÉRALE .....	203
A) Intégration au sens de Riemann .....	203
I. — Introduction .....	203
II. — Cas des fonctions positives .....	205
III. — Fonctions de signe variable .....	207
IV. — Intégration de la limite d'une suite de fonctions intégrables. Théorème de Lebesgue .....	208
B) Intégration au sens de Lebesgue .....	208
V. — Définitions diverses .....	208
VI. — Fonctions mesurables .....	209
VII. — Ensembles mesurables .....	210
VIII. — Fonctions intégrables au sens de Lebesgue .....	210
IX. — Définition de $\iint_{\Delta} f(x,y) dx dy$ .....	211
X. — Suites de fonctions intégrables .....	212
Énoncés des exercices .....	214
Solutions .....	220
8. FORMES DIFFÉRENTIELLES DANS $\mathbb{R}^3$ . ROTATIONNEL. DIVERGENCE. .....	237
I. — Formes différentielles dans un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$ ...	237
II. — Dérivée d'une forme différentielle de classe $C^1$ dans $U$ .	239
III. — Rotationnel et divergence .....	240
IV. — Primitive d'une forme différentielle définie dans $U$ .	241
Énoncés des exercices .....	243
Solutions .....	248

9.	COURBES ET SURFACES RÉGULIÈRES DANS $\mathbb{R}^3(x)$ .	
	INTÉGRALES $\int \sum_i P_i dx_i$ ET $\int_S \sum_{i,j} P_{ij} dx_i dx_j$ .....	263
	I. — Courbes régulières dans $\mathbb{R}^3$ .....	263
	II. — Intégration d'une forme différentielle de degré 1 sur un arc de courbe orientée .....	264
	III. — Surfaces régulières dans $\mathbb{R}^3$ .....	265
	IV. — Intégration d'une forme différentielle de degré 2 sur un morceau de surface orientée .....	267
	V. — Formules de transformation .....	269
	Énoncés des exercices .....	273
	Solutions .....	280
10.	ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES .....	293
	A) Équations aux dérivées partielles du premier ordre du type	
	(E) : $\sum_i b_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = c(x, u)$ .....	293
	I — Courbes caractéristiques associées à (E) .....	293
	II. — Intégrales premières .....	294
	III. — Surfaces intégrales .....	294
	B) Équations aux dérivées partielles du second ordre .....	297
	IV. — Généralités. Surfaces caractéristiques. Classification. .....	297
	V. — Équations elliptiques .....	300
	VI. — Équations hyperboliques .....	303
	VII. — Équations paraboliques .....	305
	Énoncés des exercices .....	306
	Solutions .....	317
11.	FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES $\mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$	
	I. — Dérivées partielles .....	355
	II. — Dérivée d'une fonction composée .....	356
	III. — Formule de Taylor .....	357
	IV. — Développements limités .....	358
	V. — Extrémums relatifs .....	358
	VI. — Fonctions implicites .....	360
	VII. — Extrémums relatifs sous contraintes .....	362
	VIII. — Changement de variables .....	365
	Énoncés des exercices .....	366
	Solutions .....	370
12.	INTÉGRALES. FONCTIONS D'UN PARAMÈTRE.	
	I. — Convergence uniforme d'une famille de fonctions .....	379
	II. — Propriétés de la fonction $t \mapsto \int_a^b f(t, x) dx$ .....	380

III. — Cas des fonctions définies par des intégrales impropres .....	382
IV. — Théorèmes généraux (conséquences du théorème de Lebesgue) .....	384
Énoncés des exercices .....	387
Solutions .....	390

## APPENDICE

A.	FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES DANS DES BANACHS .....	404
	I. — Généralités .....	404
	II. — Cas des fonctions numériques : $F = \mathbb{R}$ .....	406
	III. — Notions sur les dérivées secondes .....	407
	Exercices proposés .....	409
B.	FORMES $p$ -LINÉAIRES ALTERNÉES SUR $\mathbb{R}^n$ .....	413
	I. — Forme $p$ -linéaire définie sur $\mathbb{R}^n$ .....	413
	II. — Produit extérieur de formes $p$ ou $q$ -linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$ .....	415
	III. — Formes $p$ -linéaires alternées $\widehat{V}_1 \wedge \widehat{V}_2 \wedge \dots \wedge \widehat{V}_p$ .....	416
	IV. — Volumes $p$ -dimensionnels .....	419
	V. — Orientation d'une sous-variété linéaire dans $\mathbb{R}^n$ affine .....	420
	Exercices proposés .....	421
C.	SOUS-VARIÉTÉS DE $\mathbb{R}^n$ .....	424
	I. — Difféomorphisme .....	424
	II. — Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ , de dimension $p$ .....	424
	III. — Espace vectoriel tangent .....	426
	IV. — Orientation d'une sous-variété de dimension $p$ dans $\mathbb{R}^n$ .....	427
	V. — Élément d'aire d'une sous-variété de dimension $p$ dans $\mathbb{R}^n$ .....	429
	Exercices proposés .....	430
D.	FORMES DIFFÉRENTIELLES .....	434
	I. — Formes différentielles de degré $p$ . Généralités .....	434
	II. — Dérivation d'une forme différentielle .....	435
	III. — Intégration d'une forme différentielle .....	437
	IV. — Formules de transformation .....	438