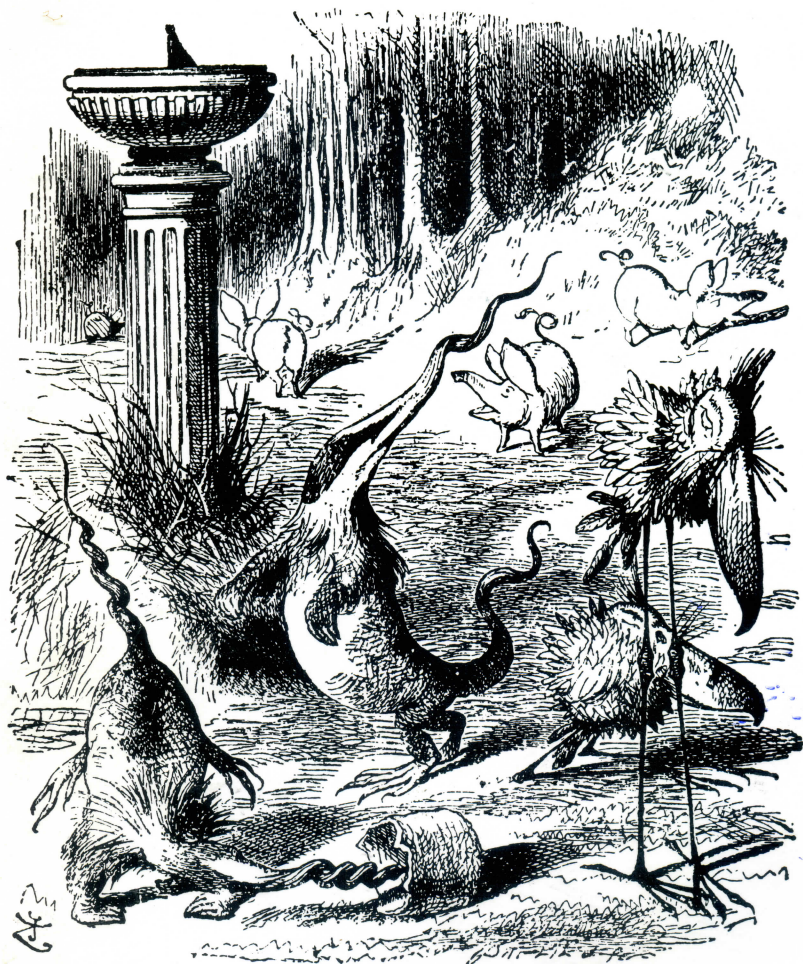


**MATHÉMATIQUES PAR VOIE ORALE**

**EXERCICES  
D'ANALYSE I**



Jean GUÉGAND

Marie-Anne MAINGUENEAU

ellipses

ÉDITEUR DES CLASSES  
PRÉPARATOIRES  
AUX GRANDES ÉCOLES

M397

Classes Préparatoires aux Grandes Écoles  
Premiers Cycles de l'Enseignement Supérieur

# MATHÉMATIQUES PAR VOIE ORALE

# EXERCICES D'ANALYSE - I

M397



21804  $\frac{1}{10}$

Jean GUÉGAND

Agrégé de l'Université

Professeur en Mathématiques Spéciales  
au Lycée François 1er (Fontainebleau)

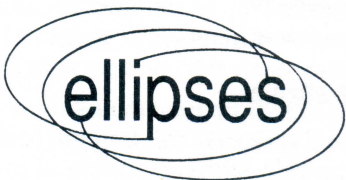
Marie-Anne MAINGUENEAU

Ancienne Élève de l'E.N.S. Sèvres

Agrégée de l'Université

Docteur de 3ème cycle

Professeur de Mathématiques Supérieures Technologiques  
au lycée Raspail (Paris)



ÉDITEUR DES CLASSES  
PRÉPARATOIRES AUX  
GRANDES ÉCOLES

# Cours d'analyse

Jean Guégand,  
Jean-Louis Roque,  
Christian Lebœuf

Voici le second volume du cours de mathématiques correspondant au nouveau programme d'analyse des classes préparatoires au Haut Enseignement Commercial. Nous convions le lecteur à faire avec nous un voyage au pays au décor déjà familier.

Nous retrouverons des notions déjà entrevues dans vos jeunes années: étude de suites, de fonctions, théorie de la dérivation... Mais ces notions seront enrichies d'outils plus fins et plus performants. Enfin l'horizon s'éclairera sur deux contrées nouvelles: la théorie des séries et celles des intégrales et intégrales généralisées, sans lesquelles on ne peut sérieusement « faire de l'analyse » et qui sont indispensables pour aborder le calcul des probabilités.

Il est à noter que les changements dus au nouveau programme portent essentiellement sur ces deux dernières notions. En effet les règles classiques de convergence de séries ne sont plus au programme (nous les avons néanmoins laissées, en petit caractère, compte tenu de leur commodité d'emploi), tandis qu'apparaît timidement la notion de convergence absolue. De même le lecteur ne trouvera plus les théories des intégrales de fonctions en escalier et des sommes de Darboux, mais il devra se contenter d'admettre l'existence des primitives des fonctions continues. Nous regrettons profondément ce dénuement théorique qui, paradoxalement, rend plus délicate l'interprétation géométrique de l'intégration.

La notion fondamentale de cet ouvrage est sans aucun doute celle de limite, étroitement liée à la pratique incessante des majorations et minorations. Ce jeu dont les pièces maîtresses s'appellent «  $\epsilon$ ,  $n_0$ ,  $\eta$  » est symbolisé par un jackpot. Il sera impératif de se rendre maître de ces techniques, d'ailleurs moins « carrées » que celles de l'algèbre et, pour cela, faire preuve d'initiative afin d'accéder au rang de « gambler ».

Nous avons volontairement ponctué ce livre des noms des grands mathématiciens qui firent l'analyse dite moderne. Leurs travaux sont encore à la base de beaucoup de textes de concours, aussi avons-nous jugé bon d'en regrouper quelques-uns à la fin de cet ouvrage. Il est évident que ces prolongements doivent être considérés comme des exercices (souvent assez difficiles).

Maintenant à vous de jouer en apprenant à « faire de l'analyse ».

## I - ANALYSE SÉQUENTIELLE

- 1. Topologie:** Rappels - Intervalles de  $\mathbb{R}$  - Voisinages
- 2. Suites:** Généralités - Convergence et divergence - Algèbre des limites - Limite et ordre - Le cas des suites monotones - Suites de Cauchy - Suites complexes
- 3. Séries:** Notions générales - Séries à termes positifs - Les critères de comparaison - Quelques notions sur les séries à termes quelconques

*Exercices*

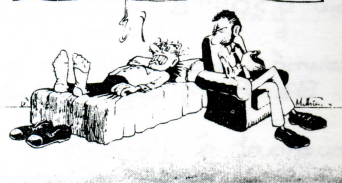
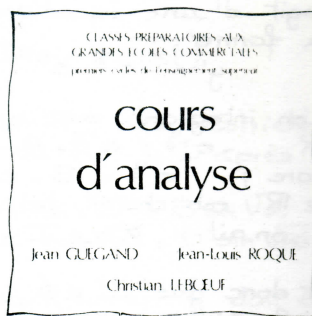
## II - PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

- 4. Généralités sur les fonctions numériques:** Généralités - Ensemble de définition - Périodicité - Parité - Autres symétries
- 5. Limites:** Généralités - L'algèbre des limites; formes indéterminées - Limite et ordre
- 6. Continuité:** Continuité en un point - Le prolongement par continuité - Continuité et algèbre - Continuité sur un intervalle - Propriétés des fonctions continues sur un intervalle - Fonctions continues par morceaux
- 7. Fonctions monotones - Inversion des fonctions usuelles:** Fonctions monotones - Fonctions inversibles - Rapports entre monotonie et inversibilité - Fonction puissance  $x \rightarrow x^r$ ,  $r \in \mathbb{Q}$  - Inversion des fonctions trigonométriques

*Exercices*

## III - CALCUL DIFFÉRENTIEL

- 8. Dérivation:** Dérivation en un point - Différentiabilité en un point - Propriétés de la dérivation - Dérivation sur un intervalle - Dérivations successives



- 9. Propriétés globales:** Les théorèmes de Rolle - Les théorèmes des accroissements finis - Propriétés d'ordre supérieur

- 10. Étude des variations:** Sens de variation - Des hauts et des bas - De la concavité et de la convexité - De l'inflexion - Branches infinies

- 11.  $U_{n+1} = f(u_n)$ :** Généralités - Le cas où  $f$  est croissante - Le cas où  $f$  est décroissante - Application - Récurrences homographiques

- 12. Propriétés locales:** Prépondérance et négligeabilité - Équivalence des fonctions - Développement limité - Le théorème de Taylor-Young - Opérations sur les développements limités - Les raisons d'être des d.l. - Traitement des formes indéterminées

*Exercices*

## IV - CALCUL INTÉGRAL

- 13. Calcul intégral:** La primitivation des fonctions - Intégration des fonctions continues - Intégrale et ordre - Intégration par parties - Changement de variable - Intégration et étude locale - Sommes de Riemann - Intégration des fonctions continues par morceaux - Appendice: notion de fonction ou de suite définies par une intégrale

- 14. Fonctions classiques:** Fonction logarithme népérien - Autres logarithmes - Fonction exponentielle de base  $e$  - Fonction exponentielle de base  $a$  - Fonction puissance - Croissances comparées - Fonctions hyperboliques - Quelques exemples résolus

- 15. À la recherche des primitives (I):** Tableau des primitives usuelles - Primitives des fonctions rationnelles - Primitives des fonctions polynomiales en  $\sin x$  et  $\cos x$  - Primitives des fonctions rationnelles en  $\sin x$  et  $\cos x$

- 16. Calcul des primitives (II):** Quelques classiques - Quelques techniques récurrentes - Primitives de fonctions contenant la racine carrée d'un binôme - Primitives de fonctions contenant la racine carrée d'un trinôme - Quelques problèmes insolubles

- 17. Intégrales généralisées:** Généralités - Les critères de convergence - Les techniques du calcul intégral

*Exercices*

## MISCELLANEOUS

Quelques irrationalités célèbres - John Wallis-James Stirling - Autour de la constante d'Euler - Deux séries classiques - Quelques intégrales célèbres - Transformation de Laplace

320 pages 17,5 x 26 - 700 g - ISBN 2-7298-0401-3 - 1981 - 2ème édition refondue (1985)



Aubin Imprimeur

LIGUGÉ, POITIERS

Achévé d'imprimer en novembre 1995  
N° d'impression L 50760

Dépôt légal novembre 1995 / Imprimé en France