

J.M. Arnaudiès P. Delezoide
H. Fraysse

**Exercices résolus
d'analyse
du cours
de mathématiques - 2**

*Classes préparatoires
1^{er} cycle universitaire*

DUNOD

1395
M1042



Exercices résolus d'analyse du cours de mathématiques - 2

Jean-Marie ARNAUDIÈS

Maître de conférences
Université Paris VI

Pierre DELEZOIDE

Professeur de Mathématiques supérieures
au Lycée Louis le Grand, Paris

N° d'Entrée :

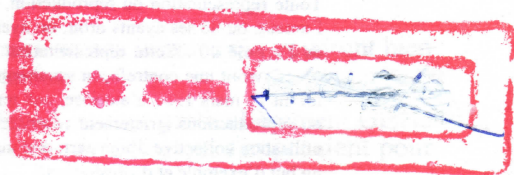
N° Inventaire : S.128

Henri FRAYSSE

Professeur honoraire de Mathématiques spéciales
au Lycée Pierre de Fermat, Toulouse



[Handwritten blue scribbles]



DUNOD

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction | V |
| CHAPITRE I. Les nombres réels | 1 |
| § I.2 Groupes abéliens totalement ordonnés, exercice 2 | 1 |
| § I.3 Groupes archimédiens, exercices 1, 2, 5 | 2 |
| § I.4 Le théorème d'isomorphisme, exercice 2 | 4 |
| § I.5 Les nombres réels, exercices 1, 2, 5, 6 | 4 |
| § I.6 Puissances, exponentielles, logarithmes, exercices 5, 7, 8, 10 | 7 |
| CHAPITRE II Suites, introduction aux séries | 11 |
| § II.1 Limites de suites réelles, exercices 2, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 23, 24, 25 | 11 |
| § II.2 Suites à valeurs dans \mathbb{R}^p ou à valeurs dans \mathbb{C} , exercices 1, 2, 8 | 24 |
| § II.3 Exponentielle naturelle, logarithme népérien, exercices 1, 2, 5 | 26 |
| § II.4 Comparaison des suites, exercices 1, 2, 5, 6, 9 | 29 |
| § II.5 Premières notions sur les séries, exercices 3, 8, 11, 12, 13, 18, 19 | 39 |
| § II.6 Développement de base donnée d'un réel positif, exercices 1, 4, 5, 8, 11 | 44 |
| CHAPITRE III Topologie de \mathbb{R} | 51 |
| § III.1 Ensembles adjacents et coupures dans \mathbb{R} , exercice 3 | 51 |
| § III.2 Ouverts, fermés et voisinages dans \mathbb{R} , exercices 3, 5, 8, 10 | 52 |
| § III.3 Ensembles de réels, exercices 1, 4, 5, 7, 10, 12 | 59 |
| § III.4 Continuité des fonctions de variable réelle, exercices 6, 8, 11, 16 | 65 |
| § III.5 Les théorèmes de Heine, exercices 2, 7, 11, 15 | 70 |
| § III.6 La droite numérique achevée, exercice 5 | 74 |
| CHAPITRE IV Fonctions d'une variable réelle | 77 |
| § IV.1 Limites, exercices 2, 6, 8, 12 | 77 |
| § IV.2 Fonctions monotones, exercices 1, 3, 11, 12 | 81 |
| § IV.3 Valeurs d'adhérence d'une fonction, exercices 2, 3, 7, 9 | 91 |
| § IV.5 Fonctions périodiques, exercices 5, 7 | 95 |
| § IV.6 Dérivées, exercices 3, 4 | 97 |
| § IV.7 Dérivées successives, exercices 3, 5 | 100 |

| | | |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| CHAPITRE V | Variation des fonctions, fonctions usuelles | 105 |
| § V.1 | Égalités et inégalités d'accroissements finis, exercices 2, 3, 12 | 105 |
| § V.2 | Variation des fonctions, exercices 2, 6e, 7, 14, 50, 20 | 109 |
| § V.3 | L'exponentielle complexe ; fonctions hyperboliques et circulaires complexes, exercice 1 | 117 |
| § V.4 | Fonctions circulaires d'une variable réelle, exercices 2e, 3, 5, 8, 14, 23, 29 | 117 |
| § V.5 | Fonctions convexes, exercices 2, 3, 9, 15 | 136 |
| CHAPITRE VI | Formules de Taylor, développements limités | 141 |
| § VI.2 | Comparaison des fonctions au voisinage d'un point ; notations de Landau, exercices 5, 7, 13 | 141 |
| § VI.3 | Formules de Taylor, exercices 1, 2, 3, 4, 8 | 146 |
| § VI.4 | Développements limités, exercices 1c, 1g, 4d, 6, 8d | 160 |
| § VI.6 | Développements asymptotiques, exercices 4, 5 | 167 |
| CHAPITRE VII | Notions sur l'intégration | 171 |
| § VII.1 | Convergence simple, convergence uniforme, exercices 1c, 1e, 5, 10, 11 | 171 |
| § VII.2 | Intégration des fonctions en escalier, exercices 3, 6, 9 | 177 |
| § VII.3 | Fonctions bornées intégrables, exercices 5, 3 | 182 |
| § VII.4 | Ensembles mesurables bornés dans \mathbb{R} , exercices 1, 4, 6 | 185 |
| § VII.5 | Sommes de Riemann, exercices 1, 9, 11 | 188 |
| § VII.6 | Primitives, exercices 1, 3, 9, 13, 16 | 198 |
| § VII.8 | Inégalités de Schwarz, Minkowski et Hölder, exercices 1, 8 | 207 |
| CHAPITRE VIII | Primitives, intégrales généralisées et intégrales à paramètres | 213 |
| § VIII.1 | Primitives de fonctions rationnelles, exercices 1, 2, 5 | 213 |
| § VIII.2 | Fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles, exercices 1, 3e, 3h, 4d, 4h, 5h, 5i, 11i, 13 | 225 |
| § VIII.3 | Intégrales généralisées, exercices 3c, 4c, 4g, 5, 9, 12, 23c, 23f, 32, 35, 37 | 237 |
| § VIII.4 | Intégrales généralisées : compléments, exercice 1a | 267 |
| § VIII.5 | Intégrales à paramètres, exercices 2, 5, 12, 14, 19 | 268 |
| CHAPITRE IX | Séries numériques | 289 |
| § IX.1 | Comparaison de séries à termes positifs, exercices 5, 6 7f | 289 |
| § IX.2 | Règles usuelles de convergence, exercices 4, 6, 7 | 295 |
| § IX.3 | Comparaison séries-intégrales, exercices 2, 4b, 7 | 299 |
| § IX.4 | Séries à termes quelconques, exercices 1a, 1g, 11, 2a, 6a, 11, 1g, 21, 23 | 305 |
| § IX.6 | Notions sur les produits infinis, exercices 1, 3f, 3lh, 8, 16 | 327 |
| § IX.7 | Notions sur les familles sommables de nombres complexes exercices 4, 9 | 335 |

| | | |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------|
| CHAPITRE X | Topologie, espaces métriques, espaces normés | 335 |
| § X.1 | Distances et normes, exercices 3, 9, 11, 12 | 339 |
| § X.2 | Topologie d'un espace métrique, exercices 1, 2 | 345 |
| § X.3 | Sous-ensembles remarquables, exercices 1a, c, d, 3, 9 | 348 |
| § X.4 | Limites, exercice 6 | 352 |
| § X.5 | Continuité, exercices 1, 6, 10, 11 | 356 |
| § X.6 | Continuité dans les evn, exercices 1, 2, 8 | 368 |
| CHAPITRE XI | Compacité, complétude, connexité | 377 |
| § XI.1 | Espaces compacts, exercices 2, 4, 5, 8, 15, 16, 18, 23 | 377 |
| § XI.2 | Espaces métriques complets, exercices 5, 6, 20, 21 | 388 |
| § XI.3 | Connexité, exercices 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 23, 28 | 397 |
| § XI.4 | Séries dans un evn, exercice 7 | 405 |
| § XI.5 | Dérivation des fonctions à valeurs dans un K -evn, exercices 2, 3 | 407 |
| CHAPITRE XII | Suites et séries de fonctions | 415 |
| § XII.1 | Généralités, exercices 2, 5, 8 | 415 |
| § XII.2 | Continuités et limites uniformes, exercices 2, 4, 5 | 418 |
| § XII.3 | Dérivation et passage à la limite, exercices 3, 5 | 424 |
| § XII.4 | Séries de fonctions, produits infinis de fonctions, exercices 1, 8d, 9, 1 | 428 |
| § XII.5 | Exemples et applications, exercices 2, 5, 9, 10, 12 | 441 |
| Bibliographie | | 452 |

J.M. Arnaudiès

P. Delezoide

H. Fraysse

Exercices résolus d'analyse du cours de mathématiques - 2

Ce recueil contient 260 exercices résolus choisis parmi les énoncés les plus représentatifs du cours d'analyse.

Très détaillées et de niveau varié, les solutions ont été rédigées avec le souci constant d'approfondir les notions abordées et d'élargir la portée des exercices.

Dans la lignée du cours avec lequel il forme un ensemble sans égal (J.M. Arnaudiès et H. Fraysse, *cours de mathématiques*, tome 2, *analyse*), ce recueil est un outil de travail complet et vivant qui ouvre la voie aux résultats concrets et pratiques.

L'ensemble comporte 4 volumes :

- *Exercices résolus d'analyse.*
- *Exercices résolus d'algèbre.*
- *Exercices résolus d'analyse (compléments).*
- *Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie.*



9 782100 014712

Code 041471
ISBN 2 10 001471 4

