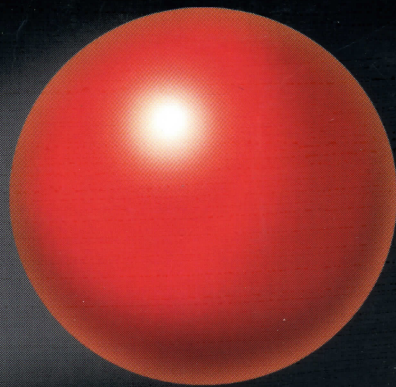


47183

# Statistique et probabilités

Manuel et exercices corrigés

Jean-Pierre Lecoutre



*4<sup>e</sup> édition*

DUNOD

M 381

# Statistique et probabilités

047183  
(3)



Manuel et exercices corrigés

**Jean-Pierre Lecoutre**

Maître de conférences à l'université Panthéon-Assas (Paris II)

4<sup>e</sup> édition

DUNOD

# Table des matières

Avant-propos	V
Notations	XIII
Introduction	1
<b>1. Notion de probabilité</b>	<b>5</b>
I. Modèle probabiliste	5
A. Ensemble fondamental	5
B. Algèbre et tribu d'événements	7
C. Probabilité	9
II. Probabilités conditionnelles	13
III. Théorème de Bayes	15
IV. Indépendance en probabilité	17
À retenir	19
<i>Compléments : éléments de combinatoire</i>	19
A. Permutations avec répétition	19
B. Permutations sans répétition ou arrangements	20
C. Permutations avec répétition de $n$ objets, dont $k$ seulement sont distincts	21
D. Combinaisons (sans répétition)	22
E. Combinaisons avec répétition	23
F. Partitions	24
<i>Exercices</i>	25
Énoncés	25
Corrigés	27
<b>2. Variable aléatoire</b>	<b>35</b>
I. Variable aléatoire réelle discrète	36
A. Définition	36
B. Loi de probabilité	37
C. Fonction de répartition	38
D. Moments d'une v.a. discrète	40

II. Variable aléatoire réelle continue	47
A. Définition	47
B. Loi de probabilité	47
C. Propriétés de la fonction de répartition	47
D. Loi continue	48
E. Loi absolument continue	49
F. Moments d'une v.a. absolument continue	52
G. Changement de variable	54
À retenir	56
Compléments	57
A. Application mesurable	57
B. Densité	58
C. Support	58
Exercices	59
Énoncés	59
Corrigés	61
<b>3. Lois usuelles</b>	<b>69</b>
I. Lois usuelles discrètes	69
A. Loi de Dirac	69
B. Loi de Bernoulli	70
C. Loi binômiale	71
D. Loi hypergéométrique	74
E. Loi de Poisson	76
F. Loi géométrique ou de Pascal	78
G. Loi binômiale négative	79
II. Lois usuelles continues	80
A. Loi uniforme	80
B. Loi exponentielle	82
C. Loi normale ou de Laplace-Gauss	83
D. Loi gamma	88
E. Loi du khi-deux	89
F. Loi bêta	90
G. Loi log-normale	92
H. Loi de Pareto	92
Compléments : fonctions génératrices	92
A. Fonction génératrice d'une v.a. discrète positive	92
B. Fonction génératrice d'une loi absolument continue	94
Exercices	96
Énoncés	96
Corrigés	99

## 4. Couple et vecteur aléatoires

109

I. Couple de v.a. discrètes	110
A. Loi d'un couple	110
B. Lois marginales	110
C. Lois conditionnelles	110
D. Moments conditionnels	112
E. Moments associés à un couple	113
F. Loi d'une somme	114
II. Couple de v.a. continues	116
A. Loi du couple	116
B. Lois marginales	119
C. Lois conditionnelles	116
D. Moments associés à un couple	121
E. Régression	122
F. Loi d'une somme	123
III. Vecteur aléatoire	125
IV. Lois usuelles	127
A. Loi multinomiale	127
B. Loi normale vectorielle	129
À retenir	134
Compléments	135
A. Application mesurable	135
B. Changement de variable	135
Exercices	137
Énoncés	137
Corrigés	140

## 5. Loi empirique

151

I. Échantillon d'une loi	152
II. Moments empiriques	153
A. Moyenne empirique	153
B. Variance empirique	153
C. Moments empiriques	155
III. Échantillon d'une loi normale	155
A. Loi de Student	156
B. Loi de Fisher-Snedecor	157
IV. Tests d'adéquation	158
A. Test du khi-deux	158
B. Test de Kolmogorov-Smirnov	161

À retenir	163
Compléments	163
A. Statistique d'ordre	163
B. Théorème de Fisher	165
Exercices	166
Énoncés	166
Corrigés	167
<b>6. Comportement asymptotique</b>	<b>171</b>
I. Convergence en probabilité	172
A. Inégalité de Markov	172
B. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	173
C. Inégalité de Jensen	173
D. Convergence en probabilité	174
E. Loi des grands nombres	177
II. Convergence en loi	179
A. Définition	179
B. Lien avec la convergence en probabilité	179
C. Propriété	179
D. Théorème de Slutsky	180
E. Conditions suffisantes de convergence en loi	180
F. Théorème central limite	180
G. Limite d'une suite image	181
H. Convergence des moments empiriques	182
I. Convergence des lois usuelles	187
À retenir	187
Compléments	187
A. Convergence presque sûre	187
B. Convergence presque complète	189
Exercices	191
Énoncés	191
Corrigés	192
<b>7. Estimation</b>	<b>197</b>
I. Définition d'un estimateur	198
II. Propriétés d'un estimateur	200
A. Biais d'un estimateur	201
B. Convergence d'un estimateur	202
C. Estimateur optimal	203

III. Méthodes de construction d'un estimateur	208
A. Méthode du maximum de vraisemblance	208
B. Méthode des moments	210
IV. Estimation par intervalle de confiance	211
A. Exemple introductif	211
B. Principe de construction	212
C. Intervalle pour une proportion	214
D. Intervalles associés aux paramètres de la loi normale	218
À retenir	225
Compléments	225
A. Inégalité de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao	225
B. Statistique exhaustive	226
C. Famille exponentielle	229
D. Amélioration d'un estimateur	231
Exercices	233
Énoncés	233
Corrigés	237
<b>8. Tests d'hypothèses</b>	<b>255</b>
I. Concepts principaux en théorie des tests	256
II. Méthode de Bayes	259
III. Méthode de Neyman et Pearson	261
A. Principe de la règle de Neyman et Pearson	261
B. Hypothèses simples	262
C. Hypothèses multiples	264
IV. Test d'indépendance du khi-deux	266
À retenir	267
Compléments	268
Exercices	269
Énoncés	269
Corrigés	272
<b>Tables statistiques</b>	<b>287</b>
<b>Index</b>	<b>301</b>

Jean-Pierre Lecoutre

# STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

Cette 4<sup>e</sup> édition présente, de façon claire et pédagogique, les principaux outils de la statistique et des probabilités.

On y trouve :

- une introduction aux notions clés probabilistes ;
- les variables, couples et vecteurs aléatoires ;
- les principales lois de probabilités discrètes et continues ;
- la loi empirique et le comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires ;
- la théorie de l'estimation ;
- la théorie des tests.

L'**alternance de cours, d'exemples et d'exercices corrigés** permet de mettre rapidement en pratique les connaissances théoriques. Chaque notion nouvelle ou propriété importante est illustrée par un exemple. Les **nombreux exercices mis à jour** permettent de valider les acquis.

S'appuyant sur de nombreuses années d'expérience de l'enseignement de la statistique dans les cursus d'économie et de gestion, l'auteur a choisi une présentation qui privilégie la compréhension des étudiants.



9 782100 533039

6667653

ISBN 978-2-10-053303-9

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

4<sup>e</sup> édition

Manuel et  
exercices  
corrigés

JEAN-PIERRE LECOUTRE  
Maître de conférences à  
l'université Panthéon-Assas  
(Paris II).

- Étudiants en  
Licence de sciences  
économiques et de  
gestion
- Étudiants en MASS
- Étudiants des  
grandes écoles  
de commerce et  
d'ingénieurs

