

cahiers scientifiques

FASCICULE XL

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

# éléments d'analyse

7

J. DIEUDONNÉ

membre de l'Institut

gauthier-villars

CENTRE UNIVERSITAIRE DE TIZI-OUZOU  
BIBLIOTHÈQUE  
NUMÉRO  
D'INVENTAIRE *0180/3*

CAHIERS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE XL

*M34/T7*

N° DE COTE *M-3484*

*M30/T7*

# ÉLÉMENTS D'ANALYSE

TOME VII

Chapitre XXIII

*2180 - 1/3*

Première partie

CENTRE UNIVERSITAIRE  
DE TIZI-OUZOU  
BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE

J. DIEUDONNÉ

Membre de l'Institut

Faculté des Sciences  
BIBLIOTHÈQUE  
N° d'inventaire: *A47/1*

N° de Côte: *...*

**gauthier-villars**

# TABLE DES MATIÈRES

Plan de l'ouvrage . . . . .	VII
Notations . . . . .	XI

## CHAPITRE XXIII

### *Équations fonctionnelles linéaires*

#### Première partie

#### *Opérateurs pseudo-différentiels*

1. Opérateurs intégraux . . . . .	6
2. Opérateurs intégraux de type propre . . . . .	9
3. Opérateurs intégraux sur les fibrés vectoriels . . . . .	14
4. Fibré des densités et sections noyaux . . . . .	18
5. Sections bornées . . . . .	25
6. Opérateurs de Volterra . . . . .	28
7. Opérateurs de Carleman . . . . .	34
8. Fonctions propres généralisées . . . . .	44
9. Distributions noyaux . . . . .	51
10. Distributions noyaux régulières . . . . .	61
11. Opérateurs régularisants et composition des opérateurs . . . . .	67
12. Microsupport singulier d'une distribution . . . . .	75
13. Équations de convolution . . . . .	83
14. Solutions élémentaires . . . . .	90
15. Problèmes d'existence et d'unicité pour les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles . . . . .	99
16. Symboles d'opérateurs . . . . .	112
17. Intégrales oscillantes . . . . .	121
18. Opérateurs de Lax-Maslov . . . . .	132
19. Opérateurs pseudo-différentiels . . . . .	137
20. Symbole d'un opérateur pseudo-différentiel de type propre . . . . .	149
21. Opérateurs pseudo-différentiels matriciels . . . . .	158
22. Paramétrix des opérateurs elliptiques sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ . . . . .	161
23. Opérateurs pseudo-différentiels dans les espaces $H_0^s(X)$ . . . . .	172
24. Problème de Dirichlet classique et problèmes de Dirichlet grossiers . . . . .	186
25. L'opérateur de Green . . . . .	194
26. Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété . . . . .	199
27. Adjoint d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété. Composé de deux opérateurs pseudo-différentiels sur une variété . . . . .	205
28. Extension des opérateurs pseudo-différentiels aux sections distributions . . . . .	211
29. Symboles principaux . . . . .	218

30. Paramétrie des opérateurs elliptiques : cas des variétés. . . . . 222

31. Théorie spectrale des opérateurs elliptiques hermitiens : I. Prolongements autoadjoints et conditions aux limites . . . . . 234

32. Théorie spectrale des opérateurs elliptiques hermitiens : II. Fonctions propres généralisées . . . . . 239

33. Opérateurs pseudo-différentiels essentiellement autoadjoints : I. Opérateurs de convolution hermitiens sur  $\mathbf{R}^n$  . . . . . 249

34. Opérateurs pseudo-différentiels essentiellement autoadjoints : II. Spectres atomiques. . . . . 252

35. Opérateurs pseudo-différentiels essentiellement autoadjoints : III. Opérateurs elliptiques hermitiens sur une variété compacte . . . . . 258

36. Opérateurs différentiels invariants. . . . . 271

37. Propriétés différentielles des fonctions sphériques . . . . . 281

38. Exemple : harmoniques sphériques . . . . . 284

CHAPITRE XXIII

Opérateurs pseudo-différentiels

Formes hermitiennes

Opérateurs pseudo-différentiels

Opérateurs elliptiques

Opérateurs elliptiques sur les variétés compactes

Opérateurs elliptiques sur les variétés ouvertes

Formes hermitiennes et prolongement autoadjoint

Formes hermitiennes et prolongement autoadjoint

Formes hermitiennes et prolongement autoadjoint

Formes hermitiennes et prolongement autoadjoint

Formes hermitiennes et prolongement autoadjoint

Formes hermitiennes et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs elliptiques et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Opérateurs pseudo-différentiels et prolongement autoadjoint

Ce chapitre a pour sujet principal la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles, une des branches les plus importantes de l'Analyse, tant par ses répercussions dans beaucoup d'autres parties des mathématiques que par ses innombrables applications à la Mécanique, l'Astronomie et la Physique. Malgré sa longueur, il est très loin de constituer un exposé complet des connaissances actuelles dans ce domaine; l'exposé a été limité aux trois types d'équations qui (en raison de leurs applications) ont été depuis 200 ans au premier plan des recherches : les équations elliptiques, hyperboliques et paraboliques, dont les prototypes sont respectivement l'équation de Laplace, l'équation des ondes et l'équation de la chaleur.

Les résultats comprennent quelques-uns des plus grands succès de l'Analyse moderne, obtenus grâce à une fusion harmonieuse et féconde des méthodes classiques (intégration par parties, théorie de Cauchy des fonctions holomorphes, transformation de Fourier) et des idées issues de l'Analyse fonctionnelle "abstraite"; tout au long du chapitre le lecteur aura donc l'occasion de voir intervenir de façon essentielle les notions et résultats développés dans tous les chapitres antérieurs.

La première partie du chapitre, qui fait l'objet de cet ouvrage, est principalement consacrée, d'abord à l'étude des opérateurs intégraux (dont on n'a rencontré jusqu'ici que l'exemple le plus simple, l'opérateur de Fredholm), puis à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et de certaines de leurs généralisations. Grâce à la théorie des distributions, ces théories englobent à la fois les opérateurs différentiels et certains opérateurs intégraux et constituent les outils qui permettront d'attaquer dans la seconde partie du chapitre (volume 8), les principaux types de "problèmes aux limites".

