cahiers scientifiques FASCICULE XXXIX

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

éléments d'analyse

6

J. DIEUDONNÉ

membre de l'Institut

gauthier-villars

CAHIERS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE XXXIX

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

TOME VI

Chapitre XXII

J. DIEUDONNÉ

Membre de l'Institut

NOUVEAU TIRAGE

gauthier-villars

TABLE DES MATIÈRES

On entend de nos jours par Analyse harmonique (commutative) la généralisation aux groupes commutatifs localement compacts de la théorie classique des séries et intégrales de Fourier, qui correspond au cas des groupes $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$, et $\mathbf{Z}^n$. Bien que, dans la suite de ce Traité, ce soit cette théorie classique qui est presque exclusivement utilisée, notamment comme outil fondamental dans la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles (chap. XXIII), la théorie générale de l'Analyse harmonique a aujourd'hui tant d'autres applications, notamment en Arithmétique, qu'il serait contraire à l'esprit des mathématiques de notre temps de se borner au cadre classique de la théorie de Fourier, qui masque la nature des idées essentielles dominant l'Analyse harmonique, comme celle de convolution ou celle de fonction de type positif.

En fait, ces idées ont une portée bien plus grande encore, car elles se rattachent en réalité à la théorie générale des représentations linéaires (de dimension infinie) des groupes localement compacts quelconques, dite encore Analyse harmonique non commutative. Sans pouvoir aborder dans cet ouvrage l'essentiel d'une théorie aussi difficile, on en a cependant traité un aspect particulier, la théorie élémentaire des *fonctions sphériques*; grâce à un théorème fondamental de Gelfand, elle repose en réalité sur une étude d'algèbres de fonctions involutives et *commutatives*, bien que liée aux représentations linéaires de groupes non commutatifs. Non seulement cette théorie englobe-t-elle celle de nombreuses "fonctions spéciales" et met-elle en lumière la notion essentielle de *représentation induite*, mais elle permet de mieux comprendre la nature de la "dualité de Pontrjagin" qui caractérise le cas particulier des groupes commutatifs.

La dernière partie du chapitre revient à la transformation de Fourier classique, mais étendue aux *distributions* tempérées sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{I}^n$. C'est seulement dans ce cadre que disparaissent les aspects "pathologiques" de la théorie classique, trop étroitement liée à la notion de convergence "ponctuelle", alors que c'est en fait dans l'application de la transformation de Fourier à la théorie des opérateurs différentiels et à leurs généralisations que réside son principal intérêt en Analyse moderne.

ISBN 2-04-001127-7