

cahiers scientifiques FASCICULE XXXVIII

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

# éléments d'analyse

## 5

J. DIEUDONNÉ

membre de l'Institut

*gauthier-villars*

CAHIERS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE XXXVIII

M. JULIA 314  
2°

# ÉLÉMENTS D'ANALYSE

TOME V

I 1225

1  
2

Chapitre XXI

J. DIEUDONNÉ

Membre de l'Institut

NOUVEAU TIRAGE



**gauthier-villars**

# TABLE DES MATIÈRES

Plan de l'ouvrage . . . . .	VII
Notations . . . . .	XI

## CHAPITRE XXI

### *Groupes de Lie compacts et groupes de Lie semi-simples*

1. Représentations unitaires continues de groupes localement compacts. . . . .	2
2. L'algèbre hilbertienne d'un groupe compact . . . . .	12
3. Caractères d'un groupe compact . . . . .	20
4. Représentations unitaires continues des groupes compacts . . . . .	26
5. Formes bilinéaires invariantes ; forme de Killing . . . . .	34
6. Groupes de Lie semi-simples ; critère de semi-simplicité d'un groupe de Lie compact . . . . .	37
7. Tores maximaux des groupes de Lie compacts connexes. . . . .	44
8. Racines et sous-groupes presque simples de rang un. . . . .	52
9. Représentations linéaires de $SU(2)$ . . . . .	58
10. Propriétés des racines d'un groupe compact semi-simple. . . . .	62
11. Bases d'un système de racines. . . . .	67
12. Exemples : groupes compacts classiques. . . . .	82
13. Représentations linéaires des groupes de Lie compacts connexes . . . . .	90
14. Éléments anti-invariants . . . . .	95
15. Les formules de H. Weyl . . . . .	103
16. Centre, groupe fondamental et représentations irréductibles des groupes compacts connexes semi-simples . . . . .	115
17. Complexifiés des groupes compacts connexes semi-simples . . . . .	136
18. Formes réelles des complexifiés des groupes compacts connexes semi-simples et espaces symétriques . . . . .	142
19. Racines d'une algèbre de Lie semi-simple complexe . . . . .	158
20. Bases de Weyl . . . . .	163
21. La décomposition d'Iwasawa . . . . .	171
22. Critère de résolubilité de E. Cartan . . . . .	182
23. Le théorème de E. E. Levi . . . . .	189
Annexe ( <i>suite</i> ) . . . . .	198
Bibliographie . . . . .	204
Index . . . . .	207



1225/1

Contrairement à beaucoup d'exposés classiques, dans ce chapitre, la théorie des groupes de Lie semi-simples est, autant que possible, axée sur son aspect *global*, les algèbres de Lie n'intervenant que comme outils de démonstration. C'est pourquoi le chapitre débute par une analyse de la structure des groupes de Lie compacts et connexes, où la Géométrie riemannienne permet une étude directe complète des tores maximaux (objets beaucoup plus "naturels" que les sous-algèbres de Cartan de la théorie classique). En outre, cette méthode a l'avantage de mettre dès le début l'accent sur l'une des notions les plus fondamentales des mathématiques, celle de représentation linéaire d'un groupe : c'est en effet des propriétés générales des représentations linéaires d'un groupe compact (non nécessairement de Lie), étudiées dès les premiers paragraphes du chapitre, que sont déduites, par la considération de la représentation adjointe, toutes les propriétés des "racines" et des "poids", qui paraissent toujours quelque peu miraculeuses quand on les aborde d'un point de vue strictement algébrique.

Une fois étudiés les groupes semi-simples compacts, les propriétés de leurs complexifications et des formes réelles (non compactes) de ces complexifications s'obtiennent presque sans effort. Il faut malheureusement montrer qu'on obtient ainsi tous les groupes de Lie semi-simples complexes (resp. réels), ce qui nécessite une étude de type classique des algèbres de Lie semi-simples complexes (où toutefois la connaissance préalable de ce qui se passe pour les groupes compacts réduit l'allure arbitraire de la méthode suivie). On peut toutefois abréger cette étude en se dispensant entièrement de considérations préalables sur les algèbres de Lie nilpotentes et résolubles, qui alourdissent inutilement beaucoup d'exposés; ces notions ne sont introduites que postérieurement, au moment où elles sont réellement utiles (décompositions d'Iwasawa et de Lévi).

ISBN 2-04-000932-9

