

cahiers scientifiques FASCICULE XXXIV

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

éléments d'analyse

4

J. DIEUDONNÉ

membre de l'Institut

gauthier-villars

~~A 338~~
M34/T4

CAHIERS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE XXXIV

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

TOME IV

Chapitres XVIII à XX

J. DIEUDONNÉ

Membre de l'Institut



NOUVEAU TIRAGE

Idc 1474 ↑
1/1

gauthier-villars

TABLE DES MATIÈRES

Plan de l'ouvrage	VII
Notations	XIII

CHAPITRE XVIII

Calcul différentiel sur une variété différentielle

II. Théorie globale élémentaire des équations différentielles du premier et du second ordre. Théorie locale élémentaire des systèmes différentiels

1. Équations différentielles du premier ordre sur une variété différentielle	2
2. Coulée d'un champ de vecteurs	4
3. Équations différentielles du second ordre sur une variété.	16
4. Champs isochrones et équations du second ordre isochrones	20
5. Propriétés de convexité des équations différentielles isochrones.	24
6. Géodésiques d'une connexion.	28
7. Familles de géodésiques à un paramètre et champs de Jacobi	33
8. Champs de p -directions, systèmes de Pfaff et systèmes d'équations aux dérivées partielles	40
9. Systèmes différentiels	46
10. Éléments intégraux d'un système différentiel	47
11. Position du problème d'intégration	55
12. Le théorème de Cauchy-Kowalewska	61
13. Le théorème de Cartan-Kähler	70
14. Systèmes de Pfaff complètement intégrables	81
15. Variétés intégrales singulières; variétés caractéristiques.	92
16. Caractéristiques de Cauchy	94
17. Exemples : I. Équations aux dérivées partielles du premier ordre.	107
18. Exemples : II. Équations aux dérivées partielles du second ordre.	114

CHAPITRE XIX

Groupe de Lie et algèbres de Lie

1. Opérations équivariantes d'un groupe de Lie sur les espaces fibrés.	120
2. Opérations d'un groupe de Lie G sur les fibrés de base G	126
3. Algèbre infinitésimale et algèbre de Lie d'un groupe de Lie.	127

4. Exemples.	135
5. La formule de Taylor dans un groupe de Lie	138
6. Algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie.	144
7. Groupes de Lie immergés et sous-algèbres de Lie	147
8. Connexions invariantes, sous-groupes à un paramètre et application exponentielle.	156
9. Propriétés de l'application exponentielle.	166
10. Sous-groupes fermés des groupes de Lie.	170
11. Représentation adjointe. Normalisateurs et centralisateurs	174
12. Algèbre de Lie du groupe des commutateurs	180
13. Groupes d'automorphismes des groupes de Lie	184
14. Produits semi-directs de groupe de Lie	188
15. Différentielle d'une application dans un groupe de Lie	198
16. Formes différentielles invariantes et mesure de Haar sur un groupe de Lie	200
17. Groupes de Lie complexes.	208

CHAPITRE XX

Connexions principales et géométrie riemannienne

1. Le fibré des repères d'un espace fibré vectoriel.	217
2. Connexions principales sur les fibrés principaux	221
3. Différentiation extérieure covariante attachée à une connexion principale et forme de courbure d'une connexion principale	226
4. Exemples de connexions principales	230
5. Connexions linéaires associées à une connexion principale.	235
6. La méthode du repère mobile.	242
7. G-structures	257
8. Généralités sur les variétés pseudo-riemanniennes	272
9. La connexion de Levi-Civita	279
10. Le tenseur de Riemann-Christoffel	292
11. Exemples de variétés riemanniennes et pseudo-riemanniennes.	300
12. Métrique riemannienne induite sur une sous-variété	309
13. Courbes dans les variétés riemanniennes	320
14. Hypersurfaces dans les variétés riemanniennes	330
15. Le problème d'immersion	341
16. La structure d'espace métrique d'une variété riemannienne. Étude locale.	346
17. Boules strictement géodésiquement convexes	355
18. La structure d'espace métrique d'une variété riemannienne. Étude globale. Variétés riemanniennes complètes	358
19. Géodésiques périodiques	367
20. Première et seconde variation de la longueur d'arc et champs de Jacobi d'une variété riemannienne	369
21. Courbure bidimensionnelle	380
22. Variétés à courbure bidimensionnelle positive ou à courbure bidimensionnelle négative	383
23. Variétés riemanniennes à courbure constante	390
Annexe : Compléments d'algèbre (<i>suite</i>)	397
Bibliographie	401
Index	405

Le chapitre XVIII est le dernier des trois chapitres qui posent les bases de l'Analyse sur les variétés différentielles, en précisant ce qu'il faut entendre dans cette théorie par équation différentielle ou aux dérivées partielles. Déjà dans les espaces \mathbb{R}^n , il est clair que la notion classique d'équation aux dérivées partielles est liée au système d'axes choisi, et cela n'a pas laissé de causer bien des difficultés aux mathématiciens qui, au XIX^e siècle, ont cherché à classer les équations aux dérivées partielles suivant leurs propriétés, même du point de vue purement local. Ce n'est qu'en ne perdant jamais de vue le sens géométrique d'un système différentiel (donnée d'un "élément tangent" en chaque point) qu'on a pu, à la suite de E. Cartan, parvenir à des conceptions pleinement satisfaisantes à ce sujet ; la théorie générale est d'ailleurs loin d'être achevée, et nous n'en donnons que les premiers rudiments.

C'est également le point de vue local qui prédomine dans les chapitres XIX et XX, où sont exposés les premiers résultats d'Analyse "intrinsèque". Le chapitre XIX est entièrement consacré à l'exploitation de l'idée fondamentale de Lie, l'existence d'un "dictionnaire" qui traduit en termes algébriques les propriétés infinitésimales d'un groupe de Lie. La méthode suivie diffère un peu de la plupart des exposés, en prenant d'emblée comme objet algébrique fondamental l'algèbre de tous les opérateurs différentiels invariants par translation à gauche, d'ordre *quelconque*. Cela a l'avantage de faire correspondre à une structure associative une autre qui l'est également ; le fait (spécial à la caractéristique 0) que la connaissance des opérateurs invariants d'ordre 1 et de leur structure d'algèbre de Lie détermine tous les autres, n'est présenté que postérieurement, fournissant d'ailleurs aussitôt l'"algèbre enveloppante" dont on donne souvent une définition abstraite tout à fait inutile.

La plus grande partie du chapitre XX est elle aussi consacrée à une étude locale, celle des variétés riemanniennes, envisagée dans le contexte plus général des "G-structures", forme moderne de la méthode du "repère mobile" de E. Cartan, qui exploite la richesse de la structure d'espace fibré principal, grâce à la théorie de Lie.

On a toutefois pu aborder dans les chapitres XVIII et XX un aspect de la géométrie différentielle "globale", l'étude des géodésiques d'une connexion inaugurée par Jacobi, qui constitue la partie la plus élémentaire du Calcul des variations, et où l'on voit pour la première fois réagir les unes sur les autres propriétés différentielles et propriétés topologiques globales.

