

cahiers scientifiques FASCICULE XXXIII

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

éléments d'analyse

3

J. DIEUDONNÉ

membre de l'Institut

de
(Epuisé.)
en con-
nexes,
la Faculté
recueillies
SECTION

gauthier-villars

CAHIERS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE XXXIII

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

TOME III

Chapitres XVI et XVII

J. DIEUDONNÉ

Membre de l'Institut

*2^e édition
nouveau tirage*

2.1865 $\frac{2}{5}$

CENTRE UNIVERSITAIRE
DE TIZI-OUZOU
BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE

gauthier-villars

TABLE DES MATIÈRES

Plan de l'ouvrage	VII
Notations	XI

CHAPITRE XVI

Variétés différentielles

1. Cartes, atlas, variétés	3
2. Exemples de variétés différentielles. Difféomorphismes	7
3. Applications différentiables	11
4. Partitions différentiables de l'unité	16
5. Espaces tangents ; applications linéaires tangentes ; rang.	21
6. Produits de variétés	33
7. Immersions, submersions, subimmersions	35
8. Sous-variétés.	37
9. Groupes de Lie	50
10. Espaces d'orbites ; espaces homogènes	56
11. Exemples : groupes unitaires, variétés de Stiefel, grassmanniennes, espaces projectifs	65
12. Fibrations	73
13. Définition de fibrations par des cartes	83
14. Espaces fibrés principaux	87
15. Espaces fibrés vectoriels	100
16. Opérations sur les fibrés vectoriels	110
17. Suites exactes, sous-fibrés et fibrés quotients	116
18. Morphismes canoniques de fibrés vectoriels	121
19. Image réciproque d'un espace fibré vectoriel	127
20. Formes différentielles	131
21. Variétés orientables et orientations	144
22. Changement de variables dans les intégrales multiples et mesures lebesguiennes	154
23. Le théorème de Sard	160
24. Intégrale d'une n -forme différentielle sur une variété pure orientée de dimension n	164
25. Théorèmes de plongement et d'approximation. Voisinages tubulaires	177
26. Homotopies et isotopies différentiables	186
27. Groupe fondamental d'une variété connexe	194
28. Revêtements et groupe fondamental	201
29. Revêtement universel d'une variété différentielle	208
30. Revêtements d'un groupe de Lie	212

CHAPITRE XVII

*Calcul différentiel sur une variété différentielle**I. Distributions et opérateurs différentiels*

1. Les espaces $\mathcal{G}^{(r)}(U)$ (U ouvert dans \mathbf{R}^n)	226
2. Espaces de sections C^∞ (resp. C^r) de fibrés vectoriels.	229
3. Courants et distributions	234
4. Définition locale d'un courant. Support d'un courant.	237
5. Courants sur une variété orientée. Distributions sur \mathbf{R}^n	240
6. Distributions réelles. Distributions positives	252
7. Distributions à support compact. Distributions ponctuelles	253
8. Topologie faible sur les espaces de distributions	256
9. Exemple : parties finies d'intégrales divergentes	260
10. Produit tensoriel de distributions.	270
11. Convolution des distributions sur un groupe de Lie	275
12. Régularisation des distributions	282
13. Opérateurs différentiels et champs de distributions ponctuelles.	287
14. Champs de vecteurs comme opérateurs différentiels	294
15. Différentielle extérieure d'une p -forme différentielle	303
16. Connexions sur un espace fibré vectoriel	312
17. Opérateurs différentiels associés à une connexion	318
18. Connexions sur une variété différentielle	321
19. Différentielle extérieure covariante	325
20. Courbure et torsion d'une connexion	328
Annexe : Compléments d'algèbre (<i>suite</i>)	337
Bibliographie	359
Index	361

Avec le chapitre XVI commence ce que l'on s'accorde à considérer comme le cœur de l'Analyse moderne, l'« Analyse sur les variétés », ou « Analyse globale », dont l'étude des aspects les plus accessibles forme l'objet du reste de ce Traité. Malheureusement, avant d'aborder les problèmes principaux de cette branche des mathématiques, il est encore nécessaire de forger les outils permettant de les attaquer.

Les concepts essentiellement *linéaires* de l'Analyse classique dans les espaces R^n , développés aux chapitres VII à X, sont en effet inadéquats pour travailler dans les variétés différentielles; ou plutôt, il faut commencer par les adapter au fait que l'aspect « linéaire », s'il demeure fondamental, est maintenant uniquement *local*; il faut donc se garder de l'utilisation de « cartes » tant qu'on ne s'est pas assuré que les notions que l'on étudie sont *intrinsèques*, c'est-à-dire indépendantes du choix des cartes. Les chapitres XVI à XVIII sont donc consacrés à rendre « intrinsèques » les concepts classiques des chapitres VIII à X; dérivées, dérivées partielles, équations différentielles, etc.

Chemin faisant, on élargira au chapitre XVII la théorie de l'intégrale : cette dernière ne nécessite à la base qu'une structure assez pauvre, celle d'espace localement compact; lorsqu'on dispose d'une structure beaucoup plus riche comme celle de variété différentielle, on peut développer une théorie plus vaste, celle des *distributions*, qui complète harmonieusement l'intégration à bien des égards et joue un rôle capital dans l'Analyse contemporaine, comme on pourra le voir aux chapitres XXII et XXIII.

