

cahiers scientifiques FASCICULE XXXI

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

éléments d'analyse 2

J. DIEUDONNE

membre de l'Institut

gauthier-villars

CAHIERS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE XXXI

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

TOME II

Chapitres XII à XV

J. DIEUDONNÉ

Membre de l'Institut

2^e édition, revue et augmentée

NOUVEAU TIRAGE

3934 $\frac{1}{3}$

gauthier-villars

GENTRE UNIVERSITAIRE
DE TIZI-OUZOU
BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE

TABLE DES MATIÈRES

Plan de l'ouvrage	VII
Notations	XI

CHAPITRE XII

Compléments de topologie et d'algèbre topologique

1. Espaces topologiques	1
2. Notions topologiques	2
3. Espaces séparés	6
4. Espaces uniformisables	10
5. Produits d'espaces uniformisables	14
6. Recouvrements localement finis et partitions de l'unité	20
7. Fonctions semi-continues	23
8. Groupes topologiques	33
9. Groupes métrisables	39
10. Espaces à opérateurs et espaces d'orbites	45
11. Espaces homogènes	53
12. Groupes quotients	55
13. Espaces vectoriels topologiques	59
14. Espaces localement convexes	62
15. Topologies faibles	72
16. Le théorème de Baire et ses conséquences	82

CHAPITRE XIII

Intégration

1. Définition d'une mesure	98
2. Mesures réelles	102
3. Mesures positives. Valeur absolue d'une mesure	103
4. Topologie vague	107
5. Intégrales supérieure et inférieure par rapport à une mesure positive	111
6. Fonctions et ensembles négligeables	117
7. Fonctions et ensembles intégrables	119
8. Les théorèmes de convergence de Lebesgue	123
9. Fonctions mesurables	131
10. Intégrales de fonctions vectorielles	149
11. Les espaces L^1 et L^2	153
12. L'espace L^∞	167
13. Mesures de base μ	173
14. Intégration par rapport à une mesure positive de base μ	177
15. Le théorème de Lebesgue-Nikodym et la relation d'ordre dans $M_{\mathbb{R}}(X)$	183

16. Applications : I. Intégration par rapport à une mesure complexe	191
17. Applications : II. Dual de L^1	193
18. Décompositions canoniques d'une mesure	197
19. Support d'une mesure. Mesures à support compact	204
20. Mesures bornées	206
21. Produit de mesures	211

CHAPITRE XIV

Intégration dans les groupes localement compacts

1. Existence et unicité d'une mesure de Haar	231
2. Cas particuliers et exemples	240
3. Fonction module sur un groupe; module d'un automorphisme	244
4. Mesure de Haar sur un groupe quotient	253
5. Convolution de mesures sur un groupe localement compact	258
6. Exemples et cas particuliers de convolutions de mesures	260
7. Propriétés algébriques de la convolution	261
8. Convolution d'une mesure et d'une fonction	265
9. Exemples de convolutions de mesures et de fonctions	267
10. Convolution de deux fonctions	271
11. Régularisation	277

CHAPITRE XV

Algèbres normées et théorie spectrale

1. Algèbres normées	288
2. Spectre d'un élément d'une algèbre normée	293
3. Caractères et spectre d'une algèbre de Banach commutative. Transformation de Gelfand	301
4. Algèbres de Banach involutives et algèbres stellaires	315
5. Représentations des algèbres involutives	326
6. Formes linéaires positives et représentations; formes hilbertiennes positives	330
7. Traces, bitraces et algèbres hilbertiennes	337
8. Algèbres hilbertiennes complètes	340
9. Le théorème de Plancherel-Godement	352
10. Représentations des algèbres de fonctions continues	366
11. La théorie spectrale de Hilbert	375
12. Opérateurs normaux non bornés	391
13. Prolongement des opérateurs hermitiens non bornés.	405
Bibliographie	421
Index	423

Avec le chapitre XI, les chapitres XIII à XV peuvent, dans ce *Traité*, être groupés en un "bloc d'Analyse fonctionnelle *linéaire*". En simplifiant à l'extrême, on peut dire en effet que les chapitres XIII et XIV étudient en détail un des types les plus importants de "formes linéaires", l'*intégrale* envisagée d'un point de vue général, qui est à l'Analyse ce que la notion de somme finie est à l'Algèbre ; tandis que le chapitre XV, approfondissant les idées introduites au chapitre XI sous un aspect plus élémentaire, s'appuie sur l'outil puissant fourni par l'intégrale pour analyser les *opérateurs linéaires* et leur spectre ; on y observera le rôle prépondérant qu'y joue un des concepts algébriques de base, la notion d'*anneau*, qui jusque là n'était intervenue que sporadiquement en Analyse.

Le cadre de ces chapitres demeure encore assez abstrait, bien qu'on ait cherché à donner de nombreux exemples d'applications dans les problèmes ; les grandes théories de l'Analyse plus "concrète" auxquelles ils préparent font l'objet des chapitres XXI à XXIII.

Les notions élémentaires d'Analyse fonctionnelle introduites aux chapitres III, V, VI et VII ne sont plus tout à fait suffisantes pour les besoins des chapitres XIII à XV ; aussi a-t-on groupé en un chapitre XII les compléments nécessaires ; on y a aussi inséré les rudiments de la théorie des groupes topologiques, qui va intervenir de façon essentielle à partir du chapitre XVI.

