

cahiers scientifiques FASCICULE XXVIII

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE GASTON JULIA

éléments d'analyse

1

J. DIEUDONNÉ

membre de l'Institut

gauthier-villars

CAHIERS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE XXVIII

ÉLÉMENTS D'ANALYSE

TOME I

FONDEMENTS DE L'ANALYSE MODERNE

J. DIEUDONNÉ

Membre de l'Institut

Traduit de l'anglais par

Mlle D. HUET

Professeur à la Faculté
des Sciences de Dijon

Avant-Propos de

M. G. JULIA

Membre de l'Institut

3^e édition

gauthier-villars



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
AVANT-PROPOS	v
INTRODUCTION	vii

CHAPITRE I

Éléments de la théorie des ensembles

1. Éléments et ensembles	2
2. Calcul booléen	3
3. Produit de deux ensembles	4
4. Applications	5
5. Images directes et réciproques	7
6. Applications surjectives, injectives, bijectives	9
7. Composition d'applications	10
8. Familles d'éléments. Réunion et intersection de familles d'ensembles ..	11
9. Ensembles dénombrables	14

CHAPITRE II

Nombres réels

1. Axiomes des nombres réels	17
2. Structure d'ordre des nombres réels	18
3. Borne supérieure et borne inférieure	23

CHAPITRE III

Espaces métriques

1. Distances et espaces métriques	30
2. Exemples de distances	31
3. Isométries	32
4. Boules, sphères, diamètre	34
5. Ensembles ouverts	35
6. Voisinages	36
7. Intérieur d'un ensemble	37
8. Ensembles fermés, points adhérents, adhérence d'un ensemble	38
9. Parties denses, espaces séparables	41
10. Sous-espaces d'un espace métrique	43

11. Applications continues	45
12. Homéomorphismes. Distances équivalentes	48
13. Limites	50
14. Suites de Cauchy, espaces complets	53
15. Théorèmes élémentaires de prolongement	56
16. Espaces compacts	58
17. Ensembles compacts	62
18. Espaces localement compacts	65
19. Espaces connexes et ensembles connexes	67
20. Produit de deux espaces métriques	72

CHAPITRE IV

Propriétés particulières à la droite réelle

1. Continuité des opérations algébriques	79
2. Fonctions monotones	82
3. Logarithmes et exponentielles	84
4. Les nombres complexes	87
5. Le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn	89

CHAPITRE V

Espaces normés

1. Espaces normés et espaces de Banach	91
2. Séries dans un espace normé	95
3. Séries absolument convergentes	97
4. Sous-espaces et produits finis d'espaces normés	102
5. Condition de continuité d'une application multilinéaire	103
6. Normes équivalentes	106
7. Espaces d'applications multilinéaires continues	107
8. Hyperplans fermés et formes linéaires continues	110
9. Espaces normés de dimension finie	112
10. Espaces normés séparables	114

CHAPITRE VI

Espaces de Hilbert

1. Formes hermitiennes	117
2. Formes hermitiennes positives	119
3. Projection orthogonale sur un sous-espace complet	121
4. Somme hilbertienne d'espaces de Hilbert	125
5. Systèmes orthonormaux	128
6. Orthonormalisation	131

CHAPITRE VII

Espaces de fonctions continues

1. Espaces de fonctions bornées	133
2. Espaces de fonctions continues bornées	135
3. Le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass	137
4. Applications	140
5. Ensembles équicontinus	142
6. Fonctions réglées	145

CHAPITRE VIII

Calcul différentiel

1. Dérivée d'une application continue	151
2. Règles formelles de dérivation	153
3. Dérivées dans des espaces de fonctions linéaires continues	155
4. Dérivées des fonctions d'une variable	157
5. Le théorème de la moyenne	160
6. Applications du théorème de la moyenne	164
7. Primitives et intégrales	167
8. Application : le nombre e	174
9. Dérivées partielles	175
10. Jacobiens	178
11. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre	179
12. Dérivées d'ordre supérieur	182
13. Opérateurs différentiels	191
14. Formule de Taylor	193

CHAPITRE IX

Fonctions analytiques

1. Séries entières	203
2. Substitution de séries entières dans une série entière	205
3. Fonctions analytiques	207
4. Le principe du prolongement analytique	211
5. Exemples de fonctions analytiques; la fonction exponentielle; le nombre π	214
6. Intégration le long d'une route	221
7. Primitive d'une fonction analytique dans un domaine simplement connexe	225
8. Indice d'un point par rapport à un circuit	226
9. La formule de Cauchy	229
10. Caractérisation des fonctions analytiques de variables complexes	234
11. Le théorème de Liouville	237
12. Suites convergentes de fonctions analytiques	238
13. Ensembles équicontinus de fonctions analytiques	241
14. La série de Laurent	243
15. Points singuliers isolés; pôles; zéros; résidus	245

16. Le théorème des résidus	249
17. Fonctions méromorphes	251

APPENDICE AU CHAPITRE IX

Application des fonctions analytiques à la topologie plane

1. Indice d'un point par rapport à un lacet	256
2. Applications essentielles dans le cercle unité	257
3. Coupures du plan	259
4. Arcs simples et courbes fermées simples	261

CHAPITRE X

Théorèmes d'existence

1. La méthode des approximations successives	270
2. Fonctions implicites	275
3. Le théorème du rang	282
4. Equations différentielles	288
5. Comparaison des solutions d'équations différentielles	290
6. Equations différentielles linéaires	298
7. Dépendance des paramètres	301
8. Dépendance des conditions initiales	309
9. Le théorème de Frobenius	314

CHAPITRE XI

Théorie spectrale élémentaire

1. Spectre d'un opérateur continu	320
2. Opérateurs compacts	323
3. La théorie de F. Riesz	327
4. Spectre d'un opérateur compact	330
5. Opérateurs compacts dans les espaces de Hilbert	335
6. L'équation intégrale de Fredholm	348
7. Le problème de Sturm-Liouville	357

ANNEXE

Éléments d'algèbre linéaire

1. Espaces vectoriels	367
2. Applications linéaires	369
3. Sommes directes de sous-espaces	370
4. Bases. Dimension et codimension	371
5. Matrices	375
6. Applications multilinéaires. Déterminants	376
BIBLIOGRAPHIE	381
INDEX	383

Le premier volume de ce Traité a pour but d'exposer de la manière la plus simple les notions élémentaires sur lesquelles repose toute l'Analyse moderne : calcul booléen, nombres réels, espaces métriques et espaces de Banach, calcul différentiel, fonctions analytiques. Sur cette base, les volumes suivants développent, d'une part ce qu'on peut appeler "l'Analyse sur les espaces vectoriels" (chapitres XIII à XV, XXII et XXIII), de l'autre "l'Analyse globale" ou "Analyse sur les variétés" (chap. XVI à XXI, XXIV et XXV), non sans interactions réciproques, bien entendu. La conception qui domine ce volume a été de reporter aux volumes suivants toutes les notions secondaires nécessaires au développement de ces théories plus avancées, en se limitant ici au strict minimum, de manière à mettre en valeur les idées les plus fondamentales (comme celles d'espace compact, d'espace complet et d'espace connexe) et à en faciliter l'assimilation. Mises à part les règles de la logique et les propriétés usuelles des entiers naturels, toute l'Analyse est reprise à la base et n'exige en principe aucune connaissance préliminaire ; quant aux notions d'Algèbre nécessaires, en dehors des définitions les plus élémentaires (groupe, anneau, idéal, corps), elles sont introduites au fur et à mesure dans une Annexe. Toutefois, il n'est pas conseillé d'aborder la lecture de ce volume sans avoir bien assimilé les mathématiques enseignées dans le Premier cycle de l'Université.

