MATHEMATIQUES
3. ANALYSE

ELIE AZOULAY & JEAN AVIGNANT

ENSEIGNEMENT SUPERIEUR TECHNIQUE

COURS ET
EXERCICES

McGRAW-HILL

ELIE AZOULAY

Ingénieur des Télécommunications
Professeur à l'Ecole Supérieure
d'Ingénieurs en Electrotechnique
et Electronique

JEAN AVIGNANT

Agrégé de l'Université
Professeur à l'I.U.T.
de Ville-d'Avray

MATHEMATIQUES
3. ANALYSE

COURS ET EXERCICES

McGRAW-HILL

Auckland - Beyrouth - Bogota - Hambourg - Johannesburg
Lisbonne - Londres - Madrid - Mexico - Montréal
New Delhi - New York - Panama - Paris - San Juan
São Paulo - Singapour - Sydney - Tokyo - Toronto

1984

TABLE DES MATIÈRES

1. Fonctions définies par des intégrales. Fonctions eulériennes **1**

A. Fonctions définies par des intégrales 1

1. Fonction $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 1
2. Fonction $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)\,dt$ 2
3. Fonction $\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\,dt$ 4
4. Fonction définie par une intégrale généralisée. Convergence uniforme 4
5. Propriétés des fonctions définies par des intégrales uniformément convergentes 5
6. Second théorème de la moyenne 7

B. Fonctions eulériennes 8

1. Définitions 8
2. Relation de récurrence de la fonction Γ 9
3. Etude de la fonction $y = \Gamma(x)$ 10
4. Prolongement de $\Gamma(x)$ aux valeurs négatives de x 12
5. Relation entre les fonctions Γ et B 12
6. Formule des compléments 13
7. Intégrales de Wallis. Formule de duplication pour la fonction Γ 15
8. Formule de Stirling 16

Résumé du chapitre 1 18

Exercices 21

2. Fonctions d'une variable complexe **37**

A. Généralités. Fonctions holomorphes 37

1. Définitions 37
2. Limites. Continuité 38
3. Dérivée d'une fonction en un point. Dérivées successives. Fonction holomorphe 39
4. Transformation conforme définie par une fonction holomorphe 40
5. Conditions de Cauchy 42
6. Fonctions harmoniques conjuguées 45
7. Différentielle d'une fonction 46

B. Fonctions holomorphes élémentaires. Fonctions analytiques . . . 47
1. Fonctions rationnelles 47
2. Fonction $f(z) = \frac{1}{z}$. Abaque de Smith 47
3. Fonction homographique 49
4. Transformation de Joukovski 51
5. Fonction définie par une série entière. Fonction analytique . . 53
6. Fonctions usuelles définies par des séries entières 55
7. Fonction logarithmique. Notion de coupure 56
8. Autres fonctions classiques 60
C. Intégration dans le champ complexe. Théorème de Cauchy 61
1. Définition de l'intégration sur un arc 61
2. Propriétés de l'intégration 63
3. Intégration d'une fonction holomorphe. Théorème de Cauchy 64
4. Primitives d'une fonction holomorphe 66
5. Formule intégrale de Cauchy 67
6. Série de Taylor d'une fonction holomorphe 68
D. Théorie des résidus 70
1. Pôles d'une fonction. Fonction méromorphe 70
2. Partie principale et résidu d'une fonction méromorphe en un pôle 71
3. Forme intégrale du résidu d'une fonction méromorphe 73
4. Théorème des résidus pour une fonction méromorphe 73
5. Point singulier essentiel. Série de Laurent 75
6. Généralisation du théorème des résidus 78
E. Application de l'intégration dans le champ complexe au calcul de certaines intégrales réelles 79
1. Calcul de $\int_0^{2\pi} \varphi\,(\cos\theta,\, \sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$, φ étant rationnelle 79
2. Lemmes de Jordan 80
3. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^\alpha}$, $\alpha > 1$ 80
4. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P\,(x)}{Q\,(x)}\,\mathrm{d}x$, P et Q étant des polynômes 83
5. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P\,(x)}{Q\,(x)}\,e^{ix}\,\mathrm{d}x$ 84
6. Autres intégrales classiques 86
Résumé du chapitre 2 88
Exercices 92

3. Transformation de Fourier **105**
1. Introduction 105
2. *Définition de la transformée de Fourier d'une fonction $f\,(t)$* . . 105
3. Formules de réciprocité de Fourier 106

4. Propriétés de la transformation de Fourier 109
5. Produit de convolution 110
6. Transformées de quelques fonctions simples 111
7. Applications de la transformation de Fourier 112
8. Formules de Parseval et de Plancherel 112
Résumé du chapitre 3 113
Exercices 114

4. Transformation de Laplace. Calcul symbolique **125**
A. Définitions et généralités 125
1. Introduction 125
2. Définitions et notations 125
3. Etude de la convergence 126
4. Transformation inverse. Formule de Bromwich 128
5. Premiers exemples. Fonction échelon-unité 129
6. Linéarité. Applications 130
7. Translation sur t (formule du retard). Fonction périodique . 130
8. Translation sur p 133
9. Homothétie sur t ou sur p 133
10. Dérivation et intégration de l'original 133
11. Dérivation et intégration de l'image 134
B. Transformées usuelles. Recherche d'un original 136
1. Fonctions se ramenant aux exponentielles ou aux polynômes 136
2. Transformée de t^α 136
3. Produit de convolution. Original d'un produit 137
4. Distribution ou « fonction » de Dirac 138
5. Transformée d'une série entière 140
6. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale 140
7. Recherche d'un original 141
C. Applications du calcul symbolique 143
1. Résolution d'équations fonctionnelles 143
2. Equations et systèmes différentiels linéaires à coefficients constants 143
3. Equations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynômes 145
Résumé du chapitre 4 146
Exercices 148

5. Fonctions de Bessel **163**
1. Introduction. Equation de Bessel 163
2. Fonction $J_0(t)$ 165
3. Etude de l'équation de Bessel dans le cas général 167
4. Equation de Bessel d'ordre entier 170
5. Relations « de récurrence » sur les fonctions de Bessel 171

6. Forme intégrale d'une fonction de Bessel d'ordre entier 172
7. Interprétation de $J_k(t)$ par une série de Fourier. Fonction génératrice 173
8. Transformée de Laplace d'une fonction de Bessel 174
9. Orthogonalité. Relations concernant les zéros des fonctions de Bessel 176

Résumé du chapitre 5 179
Exercices 181

6. Notions sur quelques autres fonctions spéciales de l'analyse **185**
1. Introduction 185
2. Compléments sur les équations différentielles linéaires. Théorème de Fuchs 185
3. Fonctions orthogonales. Polynômes orthogonaux 186
4. Equation et fonctions hypergéométriques 188
5. Equation de Legendre. Fonctions et polynômes de Legendre 189
6. Polynômes d'Hermite 193
7. Polynômes de Laguerre 194
8. Polynômes de Tchebychev 195
9. Polynômes et nombres de Bernoulli 198
10. Autres fonctions classiques 200
11. Intégrales et fonctions elliptiques 201

Résumé du chapitre 6 204
Exercices 207

7. Equations aux dérivées partielles **217**
A. Introduction et généralités 217
B. Equations aux dérivées partielles du premier ordre 218
1. Généralités 218
2. Systèmes différentiels. Intégrales premières 219
3. Equation aux dérivées partielles associée à un système différentiel linéaire 220
4. Equation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre 220
5. Cas de la dimension 2. Problème de Cauchy 223
6. Equations aux différentielles totales 224
7. Notions sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires, à deux variables 225
C. Equations aux dérivées partielles linéaires du second ordre 228
1. Généralités. Problème de Cauchy 228
2. Equation linéaire où les coefficients A, B, C ne dépendent que de x et y 229
3. Etude de l'équation $Ar + Bs + Ct = 0$ à coefficients constants 230
D. Etude de quelques équations aux dérivées partielles de la physique 232
1. Introduction et généralités 232

2. Equation des cordes vibrantes 233
3. Equation de Laplace 236
4. Equation des ondes 242
5. Equations de Maxwell. Equation des télégraphistes 244
6. Equation de la chaleur 247
7. Conclusion 248
Résumé du chapitre 7 248
Exercices 249

2. Equation des cordes vibrantes 233
3. Equation de Laplace 236
4. Equation des ondes 242
5. Equations de Maxwell. Equation des télégraphistes 244
6. Equation de la chaleur 247
7. Conclusion 248
Résumé du chapitre 7 248
Exercices 249

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant l[illegible] dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plu[illegible]raux et de ce fait souvent plus abstraits se sont imposés. Il demeure ce[illegible] un domaine où une attention toute particulière doit être appor[illegible] pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à [illegible] technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept gé[illegible] abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre « d'outils mathématiques » lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. Aussi les auteurs ont-ils opté pour un formalisme restreint, sans pour autant prendre des libertés quant à la rigueur.

Ce tome 3 d'analyse aborde les compléments généralement traités au niveau du second cycle tant des écoles d'ingénieurs que de l'université, des Mathématiques de la Physique et de la technique : fonctions eulériennes, transformations de Laplace et de Fourier, fonctions de Bessel, fonctions spéciales, équations aux dérivées partielles, fonctions d'une variable complexe, etc.

Il s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs — celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis — ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

ISBN : 2-7042-1086-3