

MATHÉMATIQUES

3. ANALYSE

ELIE AZOULAY & JEAN AVIGNANT

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR **TECHNIQUE**



COURS ET
EXERCICES

McGRAW-HILL

ELIE AZOULAY

*Ingénieur des Télécommunications
Professeur à l'Ecole Supérieure
d'Ingénieurs en Electrotechnique
et Electronique*

JEAN AVIGNANT

*Agrégé de l'Université
Professeur à l'I.U.T.
de Ville-d'Avray*



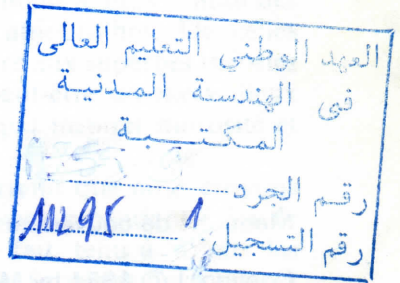
M. 28

MATHEMATIQUES

3. ANALYSE

COURS ET EXERCICES

11295/1



McGRAW-HILL

Auckland - Beyrouth - Bogota - Hambourg - Johannesburg
Lisbonne - Londres - Madrid - Mexico - Montréal
New Delhi - New York - Panama - Paris - San Juan
São Paulo - Singapour - Sydney - Tokyo - Toronto

1984



TABLE DES MATIÈRES

1. Fonctions définies par des intégrales. Fonctions eulériennes	1
A. Fonctions définies par des intégrales	1
1. Fonction $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$	1
2. Fonction $\varphi(x) = \int_a^x f(x, t) dt$	2
3. Fonction $\varphi(x) = \int_a^{b(x)} f(x, t) dt$	4
4. Fonction définie par une intégrale généralisée. Convergence uniforme	4
5. Propriétés des fonctions définies par des intégrales uniformément convergentes	5
6. Second théorème de la moyenne	7
B. Fonctions eulériennes	8
1. Définitions	8
2. Relation de récurrence de la fonction Γ	9
3. Etude de la fonction $y = \Gamma(x)$	10
4. Prolongement de $\Gamma(x)$ aux valeurs négatives de x	12
5. Relation entre les fonctions Γ et B	12
6. Formule des compléments	13
7. Intégrales de Wallis. Formule de duplication pour la fonction Γ	15
8. Formule de Stirling	16
<i>Résumé du chapitre 1</i>	18
<i>Exercices</i>	21
2. Fonctions d'une variable complexe	37
A. Généralités. Fonctions holomorphes	37
1. Définitions	37
2. Limites. Continuité	38
3. Dérivée d'une fonction en un point. Dérivées successives. Fonction holomorphe	39
4. Transformation conforme définie par une fonction holomorphe	40
5. Conditions de Cauchy	42
6. Fonctions harmoniques conjuguées	45
7. Différentielle d'une fonction	46

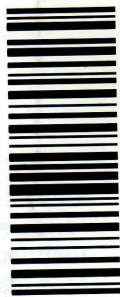
B. Fonctions holomorphes élémentaires. Fonctions analytiques	47
1. Fonctions rationnelles	47
2. Fonction $f(z) = \frac{1}{z}$. Abaque de Smith	47
3. Fonction homographique	49
4. Transformation de Joukovski	51
5. Fonction définie par une série entière. Fonction analytique	53
6. Fonctions usuelles définies par des séries entières	55
7. Fonction logarithmique. Notion de coupure	56
8. Autres fonctions classiques	60
C. Intégration dans le champ complexe. Théorème de Cauchy	61
1. Définition de l'intégration sur un arc	61
2. Propriétés de l'intégration	63
3. Intégration d'une fonction holomorphe. Théorème de Cauchy	64
4. Primitives d'une fonction holomorphe	66
5. Formule intégrale de Cauchy	67
6. Série de Taylor d'une fonction holomorphe	68
D. Théorie des résidus	70
1. Pôles d'une fonction. Fonction méromorphe	70
2. Partie principale et résidu d'une fonction méromorphe en un pôle	71
3. Forme intégrale du résidu d'une fonction méromorphe	73
4. Théorème des résidus pour une fonction méromorphe	73
5. Point singulier essentiel. Série de Laurent	75
6. Généralisation du théorème des résidus	78
E. Application de l'intégration dans le champ complexe au calcul de certaines intégrales réelles	79
1. Calcul de $\int_0^{2\pi} \varphi(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$, φ étant rationnelle	79
2. Lemmes de Jordan	80
3. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$, $\alpha > 1$	80
4. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, P et Q étant des polynômes	83
5. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx$	84
6. Autres intégrales classiques	86
<i>Résumé du chapitre 2</i>	88
<i>Exercices</i>	92
3. Transformation de Fourier	105
1. Introduction	105
2. Définition de la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$	105
3. Formules de réciprocity de Fourier	106

4. Propriétés de la transformation de Fourier	109
5. Produit de convolution	110
6. Transformées de quelques fonctions simples	111
7. Applications de la transformation de Fourier	112
8. Formules de Parseval et de Plancherel	112
<i>Résumé du chapitre 3</i>	113
<i>Exercices</i>	114
4. Transformation de Laplace. Calcul symbolique	125
A. Définitions et généralités	125
1. Introduction	125
2. Définitions et notations	125
3. Etude de la convergence	126
4. Transformation inverse. Formule de Bromwich	128
5. Premiers exemples. Fonction échelon-unité	129
6. Linéarité. Applications	130
7. Translation sur t (formule du retard). Fonction périodique ..	130
8. Translation sur p	133
9. Homothétie sur t ou sur p	133
10. Dérivation et intégration de l'original	133
11. Dérivation et intégration de l'image	134
B. Transformées usuelles. Recherche d'un original	136
1. Fonctions se ramenant aux exponentielles ou aux polynômes ..	136
2. Transformée de t^2	136
3. Produit de convolution. Original d'un produit	137
4. Distribution ou « fonction » de Dirac	138
5. Transformée d'une série entière	140
6. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale	140
7. Recherche d'un original	141
C. Applications du calcul symbolique	143
1. Résolution d'équations fonctionnelles	143
2. Equations et systèmes différentiels linéaires à coefficients ..	143
constants	
3. Equations différentielles linéaires dont les coefficients sont des ..	145
polynômes	
<i>Résumé du chapitre 4</i>	146
<i>Exercices</i>	148
5. Fonctions de Bessel	163
1. Introduction. Equation de Bessel	163
2. Fonction $J_0(t)$	165
3. Etude de l'équation de Bessel dans le cas général	167
4. Equation de Bessel d'ordre entier	170
5. Relations « de récurrence » sur les fonctions de Bessel	171

6.	Forme intégrale d'une fonction de Bessel d'ordre entier	172
7.	Interprétation de $J_k(t)$ par une série de Fourier. Fonction génératrice	173
8.	Transformée de Laplace d'une fonction de Bessel	174
9.	Orthogonalité. Relations concernant les zéros des fonctions de Bessel	176
	<i>Résumé du chapitre 5</i>	179
	<i>Exercices</i>	181
6.	Notions sur quelques autres fonctions spéciales de l'analyse	185
1.	Introduction	185
2.	Compléments sur les équations différentielles linéaires. Théorème de Fuchs	186
3.	Fonctions orthogonales. Polynômes orthogonaux	188
4.	Equation et fonctions hypergéométriques	189
5.	Equation de Legendre. Fonctions et polynômes de Legendre	193
6.	Polynômes d'Hermite	194
7.	Polynômes de Laguerre	195
8.	Polynômes de Tchebychev	198
9.	Polynômes et nombres de Bernoulli	200
10.	Autres fonctions classiques	201
11.	Intégrales et fonctions elliptiques	204
	<i>Résumé du chapitre 6</i>	204
	<i>Exercices</i>	207
7.	Equations aux dérivées partielles	217
A.	Introduction et généralités	217
B.	Equations aux dérivées partielles du premier ordre	218
1.	Généralités	218
2.	Systèmes différentiels. Intégrales premières	219
3.	Equation aux dérivées partielles associée à un système différentiel linéaire	220
4.	Equation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre	220
5.	Cas de la dimension 2. Problème de Cauchy	223
6.	Equations aux différentielles totales	224
7.	Notions sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires, à deux variables	225
C.	Equations aux dérivées partielles linéaires du second ordre	228
1.	Généralités. Problème de Cauchy	228
2.	Equation linéaire où les coefficients A, B, C ne dépendent que de x et y	229
3.	Etude de l'équation $Ar + Bs + Ct = 0$ à coefficients constants	230
D.	Etude de quelques équations aux dérivées partielles de la physique	232
1.	Introduction et généralités	232

2. Equation des cordes vibrantes	233
3. Equation de Laplace	236
4. Equation des ondes	242
5. Equations de Maxwell. Equation des télégraphistes	244
6. Equation de la chaleur	247
7. Conclusion	248
<i>Résumé du chapitre 7</i>	248
<i>Exercices</i>	249

2. Equation des cordes vibrantes	233
3. Equation de Laplace	236
4. Equation des ondes	242
5. Equations de Maxwell. Equation des télégraphistes	244
6. Equation de la chaleur	247
7. Conclusion	248
<i>Résumé du chapitre 7</i>	248
<i>Exercices</i>	249



11295/1

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant les dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plus abstraits et de ce fait souvent plus abstraits se sont imposés. Il demeure cependant un domaine où une attention toute particulière doit être apportée à la pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à caractère technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept géométrique abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre « d'outils mathématiques » lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. Aussi les auteurs ont-ils opté pour un formalisme restreint, sans pour autant prendre des libertés quant à la rigueur.

Ce tome 3 d'analyse aborde les compléments généralement traités au niveau du second cycle tant des écoles d'ingénieurs que de l'université, des Mathématiques de la Physique et de la technique : fonctions eulériennes, transformations de Laplace et de Fourier, fonctions de Bessel, fonctions spéciales, équations aux dérivées partielles, fonctions d'une variable complexe, etc.

Il s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs — celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis — ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

MASU
A. 114