

**J.M. Monier**

# **Analyse**

**Tome 2**

**600 exercices résolus  
et 21 sujets d'étude**

*Classes préparatoires  
1<sup>er</sup> cycle universitaire*

**DUNOD**

M260

# Analyse

## Tome 2

**600 exercices résolus  
et 21 sujets d'étude**

**Jean-Marie Monier**

Professeur en classe de Mathématiques Spéciales  
au lycée La Martinière - Monplaisir à Lyon



4618  $\frac{1}{2}$

DUNOD

## TABLE DES MATIERES

			Enoncés page	Solutions page
		Chapitre 1 - ESPACES VECTORIELS NORMES	1	135
Exercices	1-1	Normes, Normes équivalentes	1	135
	1-2	Topologie d'un evn	2	138
	1-3	Continuité	11	152
	1-4	Complétude	14	157
	1-5	Compacité	16	162
	1-6	Connexité	21	170
	1-7	Applications linéaires continues	23	175
	1-8	Espaces de matrices	26	180
Sujets d'Etude	SE 1-1	Espaces ultramétriques et distance $p$ -adique	27	181
	SE 1-2	Le théorème de Riesz	28	183
		Chapitre 2 - INTEGRALES GENERALISEES	31	184
Exercices	2-1	Exemples de détermination de la nature d'une intégrale généralisée	31	184
	2-2	Calculs d'intégrales généralisées	34	195
	2-3	Intégrales généralisées de fonctions positives	37	205
	2-4	Intégrales généralisées de fonctions à valeurs réelles	39	209
	2-5	Comportement asymptotique d'intégrales généralisées	44	218
	2-6	Fonctions définies par des intégrales généralisées	47	225
Sujets d'Etude	SE 2-1	Fonctions $\Gamma$ et $B$ d'Euler réelles	48	225
	SE 2-2	Convolution des fonctions continues à support borné	49	226
		Chapitre 3 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES	51	229
Exercices	3-1	Equations différentielles linéaires du premier ordre	51	229
	3-2	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre	52	232
	3-3	Equations différentielles non-linéaires du premier ordre	54	234
	3-4	Equations différentielles linéaires du second ordre	54	236
Sujet d'Etude	SE 3-1	Equation différentielle avec condition aux limites homogène	58	243
		Chapitre 4 - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES REELLES	61	245
Exercices	4-1	Limites, continuité	61	245
	4-2	Dérivées partielles, différentiabilité	63	249
	4-3	Extremums locaux	68	255
	4-4	Fonctions implicites	69	259
	4-5	Formes différentielles	70	261
Sujet d'Etude	SE 4-1	Condition d'Euler du calcul des variations	72	264

X

	Chapitre 5 - COMPLEMENTS DE CALCUL INTEGRAL	75	266
Exercices	5-1 Intégrales doubles	75	266
	5-2 Intégrales triples	78	272
	5-3 Intégrales curvilignes	80	275
Sujets d'Etude	SE 5-1 Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ à l'aide d'une intégrale curviligne	81	277
	SE 5-2 Calcul des intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ à l'aide d'intégrales doubles	82	278
	Chapitre 6 - SERIES NUMERIQUES	83	279
Exercices	6-1 Exemples de détermination de la nature d'une série numérique	83	279
	6-2 Sommes de séries	87	297
	6-3 Séries à termes réels $\geq 0$	89	301
	6-4 Séries à termes réels ou complexes	96	311
Sujets d'Etude	SE 6-1 Exemples de calculs de produits infinis	98	316
	SE 6-2 Un calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$	99	317
	SE 6-3 Formules de Wallis et de Stirling	99	318
	SE 6-4 Probabilité pour que deux entiers $\geq 1$ soient premiers entre eux	100	319
	SE 6-5 Exemples de séries doubles	101	320
	Chapitre 7 - SUITES ET SERIES DE FONCTIONS	103	322
Exercices	7-1 Suites de fonctions	103	322
	7-2 Séries de fonctions	109	331
	7-3 Séries entières	112	342
	7-4 Fonctions usuelles d'une variable complexe	121	364
	7-5 Séries de Fourier	122	366
Sujets d'Etude	SE 7-1 Complétude de $B(X,E)$	124	369
	SE 7-2 Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass	124	370
	SE 7-3 Le théorème de Stone-Weierstrass	125	372
	SE 7-4 Equation intégrale de Fredholm	126	373
	SE 7-5 Un opérateur intégral défini-positif	127	374
	SE 7-6 Un exemple d'opérateur intégral	127	375
	SE 7-7 Formule de Poisson et sommes de Gauss	128	377
	SE 7-8 Approximation uniforme d'une fonction continue par des polynômes à coefficients entiers	129	378

**J.M. Monier**

# **Analyse - Tome 2**

**600 exercices résolus et 21 sujets d'étude**

**C**e recueil d'exercices et de sujets d'étude, avec leurs solutions, porte sur la topologie, les compléments d'intégration, les équations différentielles, les fonctions de plusieurs variables, les séries numériques, et les suites et séries de fonctions. Il complète ainsi le tome 1 pour couvrir l'ensemble du programme d'analyse des 1<sup>re</sup> et 2<sup>ème</sup> années d'enseignement supérieur mathématique.

La première partie comporte *les énoncés*, dont la difficulté est graduée, ainsi que les sujets d'étude. Ces derniers exercices ne sont pas des problèmes de concours mais des "ouvertures" qui viennent éclairer et compléter le cours magistral.

La deuxième partie donne *les indications de résolution* ainsi que toutes les *réponses* aux questions posées. Les indications sont plus ou moins développées suivant la difficulté de l'exercice. Ce ne sont pas des corrigés mais plutôt des jalons destinés à guider le lecteur vers la bonne réponse et à lui rendre familiers les mécanismes mathématiques tout en restant dans les limites des programmes.

Jean-Marie Monier est professeur en classe de mathématiques spéciales au lycée La Martinière - Monplaisir à Lyon.

*Déjà parus :*

ANALYSE - Tome 1 (mathématiques supérieures)  
ANALYSE - Tome 2 (mathématiques supérieures et mathématiques spéciales)  
ALGÈBRE - Tome 1 (algèbre générale)  
ALGÈBRE - Tome 2 (algèbre linéaire)  
GEOMETRIE (mathématiques supérieures et mathématiques spéciales)



9 782100 032655

Code 043265  
ISBN 2 10 003265 8



EDITEUR