

Gérard Calot

**cours de  
calcul des  
probabilités**

**DUNOD  
DÉCISION**

2503  
n.26

Gérard Calot

# cours de calcul des probabilités

1395/1



Dunod

# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE 1

### ÉLÉMENTS D'ANALYSE COMBINATOIRE

1. 1. <i>Généralités</i> .....	1
1. 1. 1. Éléments discernables et indiscernables .....	1
1. 1. 2. Dispositions avec et sans répétition, dispositions ordonnées et non ordonnées .....	2
1. 1. 3. Principes généraux de dénombrement .....	7
1. 2. <i>Formules classiques d'analyse combinatoire</i> .....	8
1. 2. 1. Paires .....	8
1. 2. 2. Multiplets .....	9
1. 2. 3. Arrangements avec répétition .....	11
1. 2. 4. Arrangements (sans répétition) .....	12
1. 2. 5. Permutations (sans répétition) .....	16
1. 2. 6. Permutations avec répétition .....	19
1. 2. 7. Combinaisons (sans répétition) .....	24
1. 2. 8. Combinaisons avec répétition .....	31
1. 2. 9. Partitions généralisées .....	36

## CHAPITRE 2

### DÉFINITION DE LA PROBABILITÉ

2. 1. <i>Notion intuitive de probabilité</i> .....	42
2. 1. 1. Présentation .....	42
2. 1. 2. Extension de la définition .....	44
2. 2. <i>Généralisation de la notion de probabilité</i> .....	50
2. 2. 1. Cas où l'ensemble fondamental comporte un nombre fini d'éléments .....	51
2. 2. 2. Cas général .....	52

2. 3. Définitions relatives à des ensembles.....	59
2. 3. 1. Inclusion .....	59
2. 3. 2. Complémentaire .....	61
2. 3. 3. Ensembles disjoints .....	62
2. 3. 4. Ensemble des parties d'un ensemble.....	62
2. 4. Opérations logiques sur les ensembles.....	62
2. 4. 1. Réunion ou addition logique.....	62
2. 4. 2. Intersection ou produit logique .....	65
2. 5. Opérations combinées sur les ensembles.....	67
2. 5. 1. Expression d'une réunion sous forme de réunion d'ensembles disjoints .....	67
2. 5. 2. Complémentaire d'une réunion.....	68
2. 5. 3. Complémentaire d'une intersection .....	69
2. 5. 4. Exemple .....	70

## CHAPITRE 3

## LES AXIOMES DU CALCUL DES PROBABILITÉS

3. 1. Axiome des probabilités totales.....	76
3. 2. Axiome des probabilités composées.....	91
3. 2. 1. Exemple introductif.....	91
3. 2. 2. Probabilité conditionnelle .....	93
3. 2. 3. Indépendance entre deux événements.....	95
3. 2. 4. Axiome des probabilités composées dans le cas de plusieurs événements .....	97
3. 2. 5. Indépendance totale entre plusieurs événements.....	97

## CHAPITRE 4

LES SCHÉMAS DE TIRAGE PROBABILISTES :  
TIRAGE EXHAUSTIF ET TIRAGE BERNOULLIEN

4. 1. Exposition .....	102
4. 2. Le tirage exhaustif .....	103
4. 3. Le tirage bernoullien .....	107
4. 4. Comparaison des deux tirages .....	110
4. 5. Généralisation du tirage exhaustif .....	111

## CHAPITRE 5

## PROBABILITÉS DE BAYES

5. 1. <i>Le problème de Bayes</i> .....	120
5. 2. <i>Généralisation du théorème de Bayes</i> .....	123
5. 3. <i>Remarques sur les probabilités de Bayes</i> .....	126

## CHAPITRE 6

VARIABLES ALÉATOIRES  
(A UNE DIMENSION)

6. 1. <i>Exemple introductif</i> .....	130
6. 2. <i>Définition d'une variable aléatoire</i> .....	131
6. 3. <i>Variables aléatoires discrètes</i> .....	135
6. 4. <i>Variables aléatoires absolument continues</i> .....	140
6. 5. <i>Variables aléatoires mixtes</i> .....	143
6. 6. <i>Variables aléatoires continues de type singulier</i> .....	145
6. 7. <i>Notion de loi de probabilité</i> .....	145

## CHAPITRE 7

VARIABLES ALÉATOIRES A DEUX ET  
PLUSIEURS DIMENSIONS

7. 1. <i>Définition d'une variable aléatoire à <math>n</math> dimensions</i> .....	150
7. 2. <i>Variables aléatoires discrètes</i> .....	156
7. 2. 1. <i>Distributions marginales</i> .....	157
7. 2. 2. <i>Distributions conditionnelles</i> .....	158
7. 2. 3. <i>Fonctions de répartition</i> .....	159
7. 2. 4. <i>Indépendance</i> .....	161
7. 2. 5. <i>Liaison fonctionnelle</i> .....	163
7. 2. 6. <i>Généralisation à <math>n</math> dimensions</i> .....	164
7. 3. <i>Variables aléatoires absolument continues</i> .....	166
7. 3. 1. <i>Distributions marginales</i> .....	169
7. 3. 2. <i>Distributions conditionnelles</i> .....	171
7. 3. 3. <i>Indépendance</i> .....	173

7. 3. 4. Liaison fonctionnelle .....	174
7. 3. 5. Généralisation à $n$ dimensions .....	176

## CHAPITRE 8

## FONCTIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

8. 1. Généralités .....	179
8. 2. Fonction d'une seule variable aléatoire .....	180
8. 2. 1. Fonction d'une variable aléatoire discrète .....	181
8. 2. 2. Fonction d'une variable aléatoire absolument continue.....	182
8. 3. Fonction de plusieurs variables aléatoires .....	188
8. 3. 1. Fonction d'une variable aléatoire discrète à $n$ dimensions...	188
8. 3. 2. Fonction d'une variable aléatoire absolument continue à $n$ dimensions .....	190
8. 4. Fonctions de deux ou plusieurs variables aléatoires .....	194
8. 4. 1. Fonction continue, dérivable, à inverse unique, d'une variable aléatoire absolument continue .....	195
8. 4. 2. Fonction continue, dérivable, à inverse multiple, d'une variable aléatoire absolument continue .....	201
8. 4. 3. Fonction continue. Cas général .....	203

## CHAPITRE 9

CARACTÉRISTIQUES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE  
(A UNE DIMENSION)

9. 1. Caractéristiques de tendance centrale .....	208
9. 1. 1. Quantiles .....	208
9. 1. 2. Mode .....	211
9. 1. 3. Espérance mathématique .....	213
9. 1. 4. Généralisation de l'espérance mathématique .....	222
9. 2. Caractéristiques de dispersion .....	226
9. 2. 1. Écart absolu moyen .....	226
9. 2. 2. Écart quadratique moyen ou écart type .....	227
9. 2. 3. Moments .....	228
9. 2. 4. Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement .....	234
9. 2. 5. Fonction génératrice .....	235
9. 2. 6. Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff .....	238

## CHAPITRE 10

CARACTÉRISTIQUES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE  
A DEUX ET PLUSIEURS DIMENSIONS

10. 1. <i>Espérance mathématique</i> .....	242
10. 1. 1. Décomposition de l'espérance mathématique .....	243
10. 1. 2. Linéarité de l'opérateur espérance mathématique.....	246
10. 2. <i>Caractéristiques de dispersion et de corrélation</i> .....	248
10. 2. 1. Moments centrés et non centrés .....	248
10. 2. 2. Covariance .....	248
10. 2. 3. Coefficient de corrélation linéaire .....	249
10. 2. 4. Matrice des variances et covariances .....	249
10. 2. 5. Matrice de corrélation .....	250
10. 2. 6. Variance d'une forme linéaire .....	251
10. 2. 7. Matrice des variances et covariances de formes linéaires ..	252
10. 2. 8. Généralisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff ....	254
10. 2. 9. Courbes de régression. Droites des moindres carrés. Rapports de corrélation .....	256
10. 3. <i>Fonction génératrice des moments</i> .....	262
10. 4. <i>Généralisation à <math>n</math> dimensions</i> .....	264
10. 4. 1. Espérance mathématique .....	264
10. 4. 2. Caractéristiques de dispersion et de corrélation .....	264
10. 4. 3. Fonction génératrice des moments .....	273

## CHAPITRE 11

## FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

11. 1. <i>Fonction caractéristique d'une variable aléatoire unidimensionnelle</i> .....	276
11. 1. 1. Définition .....	276
11. 1. 2. Deuxième fonction caractéristique .....	277
11. 1. 3. Fonction caractéristique d'une forme linéaire de la variable $X$ .....	279
11. 1. 4. Obtention des moments non centrés .....	280
11. 1. 5. Inversion de la fonction caractéristique .....	284
11. 2. <i>Fonction caractéristique d'une variable aléatoire multidimensionnelle</i> ....	285
11. 2. 1. Définition .....	285
11. 2. 2. Fonctions caractéristiques des variables marginales et conditionnelles .....	288
11. 2. 3. Indépendance .....	288

11. 2. 4. Formes linéaires de variables indépendantes .....	289
11. 2. 5. Famille de lois de probabilité fermée par rapport à l'addition .....	291

## CHAPITRE 12

**LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES  
D'USAGE COURANT**

12. 1. <i>La loi discrète uniforme</i> .....	295
12. 1. 1. Définition .....	295
12. 1. 2. Caractéristiques .....	296
12. 2. <i>La loi binomiale</i> .....	300
12. 2. 1. Définition .....	300
12. 2. 2. Variable de Bernoulli .....	301
12. 2. 3. Caractéristiques de la loi binomiale .....	303
12. 2. 4. Comportements asymptotiques de la variable binomiale ..	307
12. 3. <i>La loi hypergéométrique</i> .....	316
12. 3. 1. Définition .....	316
12. 3. 2. Caractéristiques de la loi hypergéométrique .....	317
12. 3. 3. Comportements asymptotiques de la variable hypergéométrique .....	319
12. 4. <i>La loi binomiale négative</i> .....	321
12. 4. 1. Définition .....	321
12. 4. 2. Variable de Pascal ou géométrique .....	322
12. 4. 3. Caractéristiques de la loi binomiale négative .....	324
12. 4. 4. Comportements asymptotiques de la variable binomiale négative .....	325
12. 5. <i>La loi de Poisson</i> .....	327
12. 5. 1. Définition .....	327
12. 5. 2. Caractéristiques de la loi de Poisson .....	327
12. 5. 3. Somme de variables de Poisson indépendantes .....	330
12. 5. 4. Comportement asymptotique de la variable de Poisson .....	330
12. 5. 5. Génération de la loi de Poisson .....	332
12. 6. <i>La loi multinomiale</i> .....	337
12. 6. 1. Définition .....	337
12. 6. 2. Caractéristiques de la loi multinomiale .....	337
12. 6. 3. Comportements asymptotiques de la variable multinomiale .....	340

## CHAPITRE 13

LOIS DE PROBABILITÉ ABSOLUMENT  
CONTINUES D'USAGE COURANT

13. 1. <i>La loi continue uniforme</i> .....	347
13. 1. 1. Définition .....	347
13. 1. 2. Caractéristiques de la loi continue uniforme .....	347
13. 1. 3. Loi rectangulaire .....	348
13. 2. <i>La loi <math>\gamma</math></i> .....	349
13. 2. 1. Définition .....	349
13. 2. 2. Caractéristiques de la variable $\gamma_v$ .....	350
13. 2. 3. Variable $\gamma_v(a, b)$ .....	352
13. 2. 4. Comportement asymptotique de la variable $\gamma_v$ .....	353
13. 2. 5. Génération de la variable $\gamma_v$ .....	354
13. 2. 6. Première loi de Laplace .....	356
13. 3. <i>La loi <math>\beta</math></i> .....	358
13. 3. 1. Définition .....	358
13. 3. 2. Caractéristiques de la variable $\beta(a, b)$ .....	359
13. 3. 3. Comportements asymptotiques de la variable $\beta(a, b)$ .....	360
13. 4. <i>La loi normale</i> .....	362
13. 4. 1. La loi normale centrée réduite .....	362
13. 4. 2. Caractéristiques de la variable normale centrée réduite .....	366
13. 4. 3. Fonction linéaire de variables normales centrées réduites indépendantes .....	367
13. 4. 4. Somme des carrés de variables normales centrées réduites indépendantes .....	369
13. 4. 5. Quotient de deux variables normales centrées réduites indépendantes. Loi de Cauchy .....	370
13. 4. 6. La loi normale .....	370
13. 4. 7. Forme linéaire de variables normales indépendantes .....	372
13. 4. 8. Génération de la loi normale .....	373
13. 5. <i>La loi log-normale</i> .....	374
13. 5. 1. Définition .....	374
13. 5. 2. Caractéristiques de la loi log-normale .....	374
13. 5. 3. Génération de la loi log-normale .....	375
13. 6. <i>La loi normale à <math>n</math> dimensions</i> .....	376
13. 6. 1. Définition .....	376
13. 6. 2. Caractéristiques de la loi normale à $n$ dimensions .....	378
13. 6. 3. Formes linéaires d'une variable normale à $n$ dimensions .....	383
13. 6. 4. Formes quadratiques associées à la loi normale à $n$ dimen- sions .....	384

## CHAPITRE 14

## LES CONVERGENCES STOCHASTIQUES

14. 1. <i>Étude de la loi binomiale</i> .....	392
14. 1. 1. La loi faible des grands nombres .....	392
14. 1. 2. La loi forte des grands nombres .....	395
14. 2. <i>La convergence en probabilité</i> .....	398
14. 2. 1. Définition .....	398
14. 2. 2. Condition suffisante de convergence en probabilité .....	399
14. 2. 3. La convergence en probabilité dans le cas multidimensionnel et multiparamétrique .....	401
14. 3. <i>La convergence presque sûre</i> .....	403
14. 3. 1. Définition .....	403
14. 3. 2. Condition suffisante de convergence presque sûre .....	405
14. 3. 3. Condition nécessaire et suffisante de convergence presque sûre .....	405
14. 4. <i>La convergence en loi</i> .....	406
14. 4. 1. Définition .....	406
14. 4. 2. Convergence en probabilité vers une quantité certaine et convergence en loi vers la variable certaine .....	406
14. 4. 3. Convergence en probabilité vers une variable aléatoire et convergence en loi vers une variable aléatoire .....	407
14. 4. 4. Convergence uniforme de la fonction cumulative. Théorème de Polya .....	410
14. 4. 5. Convergence uniforme des fonctions caractéristiques. Théorème de Lévy .....	412
14. 4. 6. Théorème de continuité .....	413
14. 4. 7. Théorème central limite .....	415
14. 5. <i>Application aux échantillons bernoulliens</i> .....	417
14. 5. 1. Définition .....	417
14. 5. 2. Fonction de répartition empirique .....	417
14. 5. 3. Moyenne empirique .....	419

## CHAPITRE 15

## LES NOMBRES AU HASARD

15. 1. <i>Processus générateur de nombres au hasard</i> .....	427
15. 2. <i>Utilisation des nombres au hasard pour construire artificiellement des échantillons bernoulliens d'une loi de probabilité quelconque</i> .....	429

15. 2. 1. Méthodes exactes utilisables dans le cas de lois de probabilité discrètes, à probabilités rationnelles .....	429
15. 2. 2. Méthodes utilisables dans le cas de lois de probabilité discrètes quelconques.....	433
15. 2. 3. Méthodes applicables dans le cas de lois de probabilité continues .....	435
15. 2. 4. Cas où la loi $\mathcal{L}$ se déduit de lois plus simples .....	437
15. 2. 5. Méthodes applicables dans le cas d'une loi $\mathcal{L}$ à plusieurs dimensions.....	437
15. 3. <i>Exemples d'utilisation des nombres au hasard</i> .....	438
15. 3. 1. Échantillons artificiels .....	438
15. 3. 2. Méthodes de Monte Carlo .....	438
15. 4. <i>Les tables de nombres au hasard usuelles</i> .....	440

## ANNEXES

<i>Bibliographie</i> .....	444
<i>Graphiques</i> .....	445
Approximation normale de la loi binomiale .....	445
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson ...	450
Approximation normale de la loi de Poisson .....	451
<i>Tables</i> .....	453
Table de la distribution de $U = \mathcal{N}(0, 1)$ .....	453
Table de la fonction densité de la loi de Laplace-Gauss ...	454
Table de la fonction intégrale de la loi de Laplace-Gauss ..	455
Table de la loi de Poisson .....	456
Table des factorielles et de leur logarithme décimal .....	460
Table de nombres au hasard .....	461
<i>Lexique abrégé anglais-français des principaux termes probabilistes</i> .....	463
<i>Répertoire des principales notations</i> .....	465
1. Notations générales .....	465
2. Notations relatives aux vecteurs et matrices .....	466
3. Notations relatives à des ensembles .....	467
4. Notations relatives à l'analyse combinatoire .....	467
5. Notations relatives à une variable aléatoire à une dimension	468
6. Notations relatives à une variable aléatoire à deux dimensions .....	468
7. Notations relatives aux lois de probabilité usuelles .....	470
8. Notations relatives aux convergences stochastiques .....	470
<i>Index alphabétique</i> .....	471

**DUNOD  
DÉCISION**

**Ce Cours de calcul des probabilités** constitue une introduction au mode de raisonnement probabiliste et présente les résultats généraux nécessaires à l'application. De nombreux exemples illustrent chacun des chapitres du livre. En outre, une centaine d'exercices et de problèmes sont proposés au lecteur qui voudrait contrôler par lui-même sa propre progression. Il pourra en trouver les solutions dans un volume séparé, intitulé **Exercices de calcul des probabilités**.

Ce cours ne requiert qu'une culture générale du niveau du premier cycle universitaire. Il s'adresse aux étudiants de toutes spécialités et ingénieurs, cadres d'entreprises désireux de s'initier à la méthode statistique et de tirer parti de ses nombreuses applications entrées maintenant dans le domaine du quotidien : enquêtes par sondage, contrôle industriel, expérimentation scientifique, gestion administrative et économique.

*Nous considérons que cet ouvrage constitue le livre essentiel, en langue française, pour quiconque veut acquérir des connaissances solides et utilisables en calcul des probabilités. L'appareil mathématique est raisonnable et, si l'ensemble est d'un bon niveau, il n'est jamais hermétique.*

*Revue économique*

Du même auteur, dans la même collection :  
**Exercices de calcul des probabilités**  
**Cours de statistique descriptive**



ISBN 2-04-001659-7