

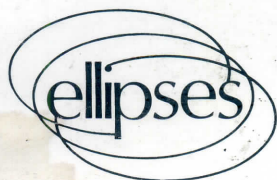
Jacques PICHON

Cours et conseils de travail
Exercices et problèmes corrigés

C

TRIGONOMÉTRIE

FONCTIONS
USUELLES



M 248

Mathématiques supérieures et première année universitaire
Cours et conseils de travail; exercices et problèmes corrigés

Jacques PICHON

Agrégé de mathématiques supérieures
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud
Professeur en classe de Mathématiques Supérieures
au Lycée Saint-Louis (Paris)



4671 $\frac{\lambda}{\lambda}$

TRIGONOMETRIE

FONCTIONS USUELLES



Utilisation de \mathbb{C} pour la géométrie
Trigonométrie circulaire et hyperbolique
Fonctions arc sin , arg sh , arc tg , ...
Équations différentielles $ay'' + by' + cy = K \sin (\omega t + \varphi)$

SOMMAIRE

LES NOMBRES COMPLEXES	9 à 38
I - DÉFINITION ET REPRÉSENTATION	9 à 18
1 - INTRODUCTION	9
2 - DÉFINITION DES NOMBRES COMPLEXES	9
<ul style="list-style-type: none">• Structure de corps• Structure de \mathbb{R} - algèbre associative• Définition d'un sous-corps et d'un homomorphisme de corps. \mathbb{R} est un sous-corps de \mathbb{C}• Partie réelle, partie imaginaire• Propriétés de la conjugaison	
3 - REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES : FORME TRIGONOMÉTRIQUE	12
<ul style="list-style-type: none">• Affixe d'un point, d'un vecteur• Point-image; vecteur-image d'un nombre complexe• Module ou Argument	
4 - OPÉRATION SUR LES NOMBRES COMPLEXES DONNÉS SOUS FORME TRIGONOMÉTRIQUE. UNE NOUVELLE NOTATION	14
<ul style="list-style-type: none">• U est un groupe multiplicatif• Notation $e^{i\theta}$	
5 - INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PRODUIT DES NOMBRES COMPLEXES	16
6 - UNE AUTRE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES	17
<ul style="list-style-type: none">• Similitude• Translation	
II - LES NOMBRES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE	19 à 30
1 - UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE	19
<ul style="list-style-type: none">• Problèmes d'angles et de longueurs	
2 - ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DES PLANS A L'AIDE DES NOMBRES COMPLEXES	21
<ul style="list-style-type: none">• Groupe des homothéties-translations• Groupe des déplacements• Similitudes• Symétries• Transformations représentées par $z \rightarrow az + b\bar{z} + c$	

3 - MÉTHODE POUR RÉSOUDRE UN PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE PAR LES COMPLEXES	28
III - CALCUL DANS \mathbb{C} , RACINES D'UN NOMBRE COMPLEXE	31 à 38
1 - RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE	31
<ul style="list-style-type: none"> • Sous forme cartésienne et sous forme trigonométrique • Equations du second degré dans \mathbb{C} 	
2 - ÉTUDE DES RACINES $n^{\text{ièmes}}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE	34
<ul style="list-style-type: none"> • Racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1. Sous-groupe U_n • Nombre j • Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre 	
3 - CALCUL DANS \mathbb{C} . QUELQUES REMARQUES PRATIQUES.	37
<ul style="list-style-type: none"> • Calcul avec j 	
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES	39 à 57
IV - TRIGONOMÉTRIE CIRCULAIRE	39 à 47
1 - INTRODUCTION	39
<ul style="list-style-type: none"> • Angle et secteur angulaire • Mesurer les angles 	
2 - FONCTIONS \sin , \cos , tg , cotg	40
<ul style="list-style-type: none"> • Utilisation d'un dessin • $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \cos t$ et $b = \sin t$ 	
3 - RÉOLUTION D'ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES	44
<ul style="list-style-type: none"> • $a \cos x + b \sin x = c$; deux méthodes • $a \cos x + b \sin x$ se met sous la forme $A \cos(x - \varphi)$ • $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$ • Position des racines d'un trinôme du second degré par rapport à deux nombres 	
4 - UNE NOUVELLE NOTATION	46
V - TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE	48 à 51
1 - DE NOUVELLES FONCTIONS DE \mathbb{R} VERS \mathbb{R} : ch , sh , th , coth	48
<ul style="list-style-type: none"> • Ressemblance avec les fonctions de trigonométrie circulaire 	
2 - FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE	49
3 - RÉOLUTION D'ÉQUATIONS	51
<ul style="list-style-type: none"> • $a \text{ch} x + b \text{sh} x = c$; trois méthodes 	
VI - FONCTION EXPONENTIELLE DE \mathbb{C} VERS \mathbb{C}	52 à 57
1 - DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS	52
<ul style="list-style-type: none"> • Définition de e^z • Fonctions \sin, \cos, sh, ch complexes • Relations entre ces fonctions 	

- 2 - APPLICATION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE COMPLEXE : RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $ay'' + by' + cy = K \sin(\omega t + \varphi)$** 53
- Dérivée d'une fonction à valeurs complexes; dérivée de $t \rightarrow e^{zt}$
 - Résolution de l'équation sans second membre et de l'équation avec second membre

LES FONCTIONS USUELLES 59 à 88

VII - DÉFINITIONS ET THEORÈMES POUR LES FONCTIONS USUELLES 59 à 72

1 - INTRODUCTION 59

2 - LA DÉFINITION MODERNE DU MOT "FONCTION" 59

- Evolution historique du mot "fonction"

3 - DÉFINITIONS 60

- Fonction réelle; variable réelle
- Intervalles de \mathbb{R}
- Fonction croissante, décroissante, monotone
- Remarque de logique
- Primitive d'une fonction

4 - THÉORÈMES 63

- $f' = 0$
- $f' \geq 0$
- Existence d'une primitive
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Fonction continue sur une réunion d'intervalles ouverts
- Fonctions non dérivables
- Existence d'une fonction réciproque
- Dérivée d'une fonction réciproque

5 - REMARQUE SUR LA NOTATION DES DÉRIVÉES 68

- Notation de la dérivée de f
- Notation de la dérivée d'une fonction composée

6 - RAPPEL DE QUELQUES FONCTIONS DÉJÀ CONNUES 69

- Fonctions polynômes, rationnelles
- Fonctions logarithmiques
- Fonctions exponentielles
- Fonctions trigonométriques
- Exponentiation des fonctions

7 - QUELQUES REMARQUES SUR CERTAINES FONCTIONS USUELLES 71

- Fonctions trigonométriques quand l'angle n'est pas en radians
- Comparaison de $\sqrt[p]{x}$ et $x^{1/p}$

VIII - FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES 73 à 79

1 - ARGUMENT SINUS HYPERBOLIQUE 73

2 - ARGUMENT COSINUS HYPERBOLIQUE 73

3 - ARGUMENT TANGENTE HYPERBOLIQUE 75

4 - ARGUMENT COTANGENTE HYPERBOLIQUE 75

5 - RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES 76

- Dérivées égales sur une réunion d'intervalles ouverts disjoints
- Méthode pour établir des relations

IX - FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES	80 à 88
1 - REMARQUE PRÉLIMINAIRE	80
2 - ARC SINUS	80
3 - ARC COSINUS	82
4 - ARC TANGENTE	82
5 - ARC COTANGENTE	83
6 - UTILISATION DU CERCLE POUR LES FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES	83
7 - RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES	85
• Formule liant $\text{Arc tg } x$ et $\text{Arc tg } \frac{1}{x}$	
8 - AUTRE MÉTHODE POUR DÉMONTRER DES RELATIONS	86

ÉNONCÉS DES EXERCICES ET DES PROBLÈMES

	89 à 102
1 - EXERCICES SUR LES COMPLEXES	89 à 90
2 - EXERCICES DE TRIGONOMÉTRIE	91 à 93
3 - EXERCICES SUR LES FONCTIONS USUELLES	94 à 96
4 - PROBLÈME	97 à 98
5 - PROBLÈME INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION 1979	99 à 102

CORRIGÉS DES EXERCICES ET DES PROBLÈMES

	103 à 168
1 - CORRIGÉS DES EXERCICES SUR LES COMPLEXES	103
2 - CORRIGÉS DES EXERCICES DE TRIGONOMÉTRIE	116
3 - CORRIGÉS DES EXERCICES SUR LES FONCTIONS USUELLES	126
4 - CORRIGÉ DU PROBLÈME	153
5 - CORRIGÉ DU PROBLÈME INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION 1979	159

FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRIE	169 à 171
TRIGONOMÉTRIE CIRCULAIRE ET HYPERBOLIQUE	

INDEX DÉTAILLÉ	172 à 176
----------------	-----------