

Jacques PICHON

Cours et conseils de travail
Exercices et problèmes corrigés

LES COURBES
DANS LE PLAN
ET DANS L'ESPACE

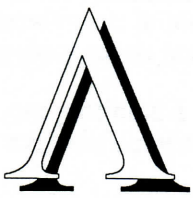


M 245

Mathématiques supérieures et première année universitaire
Cours et conseils de travail; exercices et problèmes corrigés

Jacques PICHON

Agrégé de mathématiques
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud
Professeur en classe de Mathématiques Supérieures
au Lycée Saint-Louis (Paris)



LES COURBES DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

5234 $\frac{1}{1}$

Fonctions à valeurs dans un espace de dimension n
Courbes en coordonnées polaires
Courbes données par une équation paramétrique dans le plan et l'espace
Familles de courbes dépendant d'un paramètre



EDITEUR DES PREPARATIONS
GRANDES ECOLES - MEDECINE

SOMMAIRE

FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE A VALEURS DANS \mathbb{C} OU DANS UN ESPACE DE DIMENSION n	9 à 44
I - FONCTION A VALEURS DANS \mathbb{C}	9 à 10
1- LIMITE D'UNE FONCTION DE \mathbb{R} DANS \mathbb{C}	9
2- CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ	10
II - FONCTIONS A VALEURS DANS UN ESPACE DE DIMENSION FINIE	11 à 23
1- UTILISATION DE \mathbb{R}^n	11
. Espace vectoriel	
. Espace affine	
2- MESURE DES DISTANCES	12
. Axiomes	
. Distance euclidienne	
. Inégalité de Schwarz	
. Distance d_α $\alpha = 1, 2, \infty$	
. Distances équivalentes	
. Normes	
3- FONCTIONS A VALEURS DANS UN ESPACE DE DIMENSION n	17
. dans \mathbb{R}^n	
. dans un espace vectoriel	
. dans un espace affine	
. limite	
. utilisation des fonctions coordonnées	
4- CONTINUITÉ DES FONCTIONS A VALEURS DANS UN ESPACE DE DIMENSION n	20
. Équivalence de plusieurs propriétés	
. Produit de fonctions continues	
. Fonctions bornées	
III - DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS A VALEURS DANS UN ESPACE DE DIMENSION n	25 à 42
1- DÉFINITION	25
. Cas particuliers d'un espace affine	
. Utilisation des fonctions coordonnées	
. Vecteur $\overline{u}(\theta)$, dérivée	
. Dérivée d'un vecteur unitaire	
. Tangente à une courbe	
. Vecteur vitesse	
2- THÉOREMES SUR LA DÉRIVATION	28
. Dérivation des fonctions composées	
. Formule de Taylor-Young	
. Vecteur rotation instantanée	
. Changement de paramétrage d'une courbe	
. Dérivation d'un produit	

. Vitesse d'un solide indéformable	
. Mouvement d'un point attiré par un point fixe	
3- DÉRIVÉES SUCCESSIVES - CLASSE D'UNE FONCTION	38
4- FORMULE D'APPROXIMATION DES FONCTIONS A VALEURS DANS UN ESPACE DE DIMENSION FINIE	38
. Pas de théorème de Rolle	
. Une jolie démonstration d'analyse	
. Inégalité des accroissements finis	
. $f'(t) = 0$ sur $[a, b] \Rightarrow f$ constante sur $[a, b]$	
. $\ \int_a^b f(t) dt \ \leq \int_a^b \ f(t) \ dt$	
. Formule de Taylor avec reste intégral	
. Formule de Taylor-Young	
. DLs	
IV - RÉSUMÉ DES RÉSULTATS A CONNAITRE	43 à 44
COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES	45 à 90
V - LES COORDONNÉES POLAIRES ET QUELQUES EXEMPLES DE COURBES	45 à 54
1- COORDONNÉES POLAIRES	45
. Coordonnées	
. Symétriques d'un point par rapport à Ox	
. Relation avec les coordonnées cartésiennes	
2- ÉQUATION D'UNE COURBE EN COORDONNÉES POLAIRES	48
3- EXEMPLES	48
4- LES CONIQUES EN COORDONNÉES POLAIRES	49
. $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$	
. Directrice relative à un foyer	
. Exemples de tracés	
VI - ÉTUDE DES COURBES DÉFINIES PAR UNE RELATION $\rho = f(\theta)$	55 à 65
1- REMARQUE	55
. les cames	
2- L'ÉTUDE DES VARIATIONS DE LA FONCTION f	57
. Ce qui nous intéresse, c'est le signe de ρ	
3- COMMENT TROUVER LA TANGENTE EN UN POINT	57
. autre que l'origine	
. à l'origine	
4- POSITION PAR RAPPORT A LA TANGENTE - POINTS D'INFLEXION	60
5- ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES	63
. Recherche d'une asymptote	
. Position par rapport à l'asymptote	
6- BRANCHES SPIRALES	64
. Cercle asymptote	
. Point asymptote	

VII - SYMÉTRIES D'UNE COURBE EN POLAIRES	67 à 78
1- ÉTUDE PRATIQUE D'UNE COURBE EN POLAIRES	67
DONNÉE PAR UNE ÉQUATION $\rho = f(\theta)$	
. Rotations, symétries, intervalle d'étude	
2- PRINCIPES POUR LA RÉDUCTION DE L'INTERVALLE D'ÉTUDE D'UNE COURBE EN COORDONNÉES POLAIRES	69
3- EXEMPLES D'ÉTUDE DE COURBES EN POLAIRES AYANT BEAUCOUP DE SYMÉTRIES	70
. Les points doubles	
VIII - PRATIQUE DU TRACÉ DES COURBES EN POLAIRES	79 à 90
1- QUELQUES EXEMPLES	79
. Strophoïde droite	
. Étapes du tracé	
2- RÉSUMÉ	89
COURBES PARAMÉTRIQUES	91 à 148
IX - QU'EST-CE QU'UNE COURBE	91 à 94
1- INTRODUCTION	91
2- DÉFINITION D'UNE COURBE	93
X - ÉTUDE THÉORIQUE DES COURBES DANS \mathbb{R}^2	95 à 114
1- ÉTUDE DE LA COURBE AU VOISINAGE D'UNE VALEUR t_0 DU PARAMÈTRE	95
. Existence d'une tangente	
. Point singulier, stationnaire, régulier	
. Tangente en un point singulier	
. Position par rapport à la tangente	
. Points d'inflexion de rebroussement	
. Point d'inflexion analytique	
. Utilisation des DLs	
. Étude du cas où la fonction a une limite finie quand t tend vers l'infini	
2- ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES	109
. Définition	
. Courbe asymptote	
. Utilisation des DLs	
XI - TRACÉ DES COURBES PLANES DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION PARAMÉTRIQUE	115 à 127
1- QUE FAUT-IL RASSEMBLER COMME INFORMATIONS POUR FAIRE LE TRACÉ	115
. Faire un tableau de variation	
. Chercher les points singuliers	
2- QUELQUES EXEMPLES D'ÉTUDE ET DE TRACÉ	120
XII - ÉTUDE THÉORIQUE DES COURBES DANS \mathbb{R}^3	129 à 140
1- POSITION DE LA COURBE PAR RAPPORT A LA TANGENTE	129
. Plan osculateur, équation	
. Équation de la tangente	
. Normale, binormale, normale principale	

2- ÉTUDE DES ASYMPTOTES	137
. Direction asymptotique	
. Asymptote	
. Utilisation des DLs	
XIII - TRACÉ D'UNE COURBE GAUCHE	141 à 148
1- QUELQUES REMARQUES SUR LES PROJECTIONS	141
. Cylindre, équation	
2- REPRÉSENTATION D'UNE COURBE DE \mathbb{R}^3	143
. Equations des projections	
. Projection des tangentes et asymptotes	
FAMILLE DE COURBES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE	149 à 172
XIV - DÉFINITION - EXEMPLES	149 à 158
1- INTRODUCTION	149
. Exemples variés	
. Equipotentiels, lignes de champs	
. Courbes de niveau	
2- EXEMPLES	153
. Projection orthogonales	
XV - TRACÉ D'UNE FAMILLE DE COURBES DÉFINIE PAR UNE RELATION $y = f(x, \lambda)$	159 à 165
1- PROBLÈME	159
. Résultats à rassembler	
. Méthode	
2- EXEMPLE D'ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE COURBES	161
. Rôle du brouillon	
XVI - EXEMPLE D'ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE COURBES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES	166 à 172
ÉNONCÉ DES EXERCICES	173 à 178
1- EXERCICES SUR LES FONCTIONS A VALEURS DANS UN ESPACE DE DIMENSION n	173
2- EXERCICES SUR LES COURBES EN POLAIRES	175
3- EXERCICES SUR LES COURBES PARAMÉTRIQUES	176
4- EXERCICES SUR LES FAMILLES DE COURBES	178
CORRIGÉS DES EXERCICES	179 à 234
1- FONCTIONS A VALEURS DANS UN ESPACE DE DIMENSION n	179
2- COURBES EN POLAIRES	185
3- COURBES PARAMÉTRIQUES	197
4- FAMILLES DE COURBES	219
INDEX DÉTAILLÉ	235