

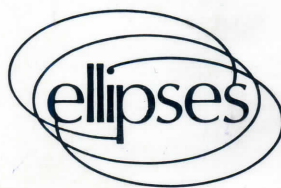
Jacques PICHON

Cours et conseils de travail
Exercices et problèmes corrigés

ARITHMETIQUE

SYSTEMES
LINEAIRES

STRUCTURES



M 243

Mathématiques supérieures et première année universitaire
Cours et conseils de travail; exercices et problèmes corrigés

Jacques PICHON

Agrégé de mathématiques
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud
Professeur en classe de Mathématiques Supérieures
au Lycée Saint-Louis (Paris)



ARITHMETIQUE SYSTEMES LINEAIRES STRUCTURES



4784 $\frac{1}{2}$

Etude de \mathbb{Z} , $n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, \mathbb{Q}
Méthode du pivot de Gauss
Application à l'étude des espaces vectoriels
Etude élémentaire des structures
Etude élémentaire des matrices



EDITEUR DES PREPARATIONS
GRANDES ECOLES - MEDECINE

SOMMAIRE

ARITHMETIQUE

I-	PROPRIETES ELEMENTAIRES DE \mathbb{Z}	9 à 14
	1- Introduction	9
	2- Rappels	10
	\mathbb{Z} est un anneau intègre	
	3- Division euclidienne	13
II-	DIVISIBILITE DANS \mathbb{Z}	15 à 20
	1- Divisibilité	15
	2- Propriétés élémentaires de la divisibilité	15
	3- PGCD et PPCM	16
	4- Propriétés des nombres premiers entre eux	18
	Théorème de Gauss	
	5- Calcul du PGCD : algorithme d'Euclide	19
III-	LES NOMBRES PREMIERS	21 à 27
	1- Définition	21
	2- Comment trouver les nombres premiers	22
	Crible d'Eratosthène	
	3- Comment savoir si un certain nombre est premier	22
	4- Décomposition en facteurs premiers	23
	5- Applications de la décomposition en facteurs premiers	26
	PGCD, PPCM	
IV-	ETUDE DES ENSEMBLES $n\mathbb{Z}$	29 à 46
	1- Définition de $n\mathbb{Z}$	29
	2- Sous-groupes de \mathbb{Z}	29
	Caractérisation de PGCD et PPCM par les $n\mathbb{Z}$	
	3- Les idéaux de \mathbb{Z}	32
	4- Le théorème de Bézout	35
	5- Résolution de l'équation $au + bv = c$	36
	6- La relation de congruence	38
	7- Trois résultats sur les congruences	42
	Théorème de Fermat	
	Périodicité des restes de a^n modulo p	
	Résolution d'un système de congruences	
V-	ETUDE DE $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	47 à 59
	1- Définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	47
	2- Addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	48
	3- Multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	50

4- Propriétés de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour n premier	52
Carrés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
5- Eléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	54
6- Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	55
7- Un complément à l'étude des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	56
Isomorphisme avec un produit de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$	
8- Idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	58

EN RESUME	59
-----------	----

VI- LES NOMBRES RATIONNELS	61 à 69
1- Rappels	61
Forme irréductible	
2- Opérations sur les nombres rationnels	62
3- \mathbb{Q} et l'arithmétique	64
4- L'ordre sur \mathbb{Q}	65
Partie entière	
5- Homomorphismes de groupes de \mathbb{Q} vers \mathbb{Q}	67
6- Recherche des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients dans \mathbb{Q} ou dans \mathbb{Z}	68

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

VII- RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES PAR LA METHODE DU PIVOT PARTIEL DE GAUSS	71 à 91
1- Notations	71
2- Résolution de quelques exemples sans les machines à calculer	72
Structure de l'ensemble des solutions	
3- Etude générale	76
Pivots	
Combinaisons linéaires d'équations linéaires	
Equivalence des systèmes successifs dans la méthode du pivot	
Système triangulaire	
4- Adaptation de la méthode pour le calcul sur machines	84
5- Généralisation de l'étude des systèmes linéaires	85
Rang du système	

MATRICES

VIII- LES MATRICES	93 à 119
1- Introduction	93
2- Définition	95
3- Opérations : l'addition, la multiplication par un élément de K	97
Combinaison linéaire	
4- Transformation d'une matrice	99
5- Utilisation des matrices	100
Famille finie d'éléments de \mathbb{R}^p	
Système d'équations linéaires	
Transformation du plan ou de l'espace	
6- Opérations sur les matrices : produit de matrices	104
7- Résumé	112
8- Matrices inversibles	114

STRUCTURES

IX- GENERALITES SUR LES STRUCTURES	121 à 137
1- Introduction	121
2- Relation binaire	124
3- Loi de composition interne (LCI)	126
Monoïde	
Groupe	
Anneau	
Corps	
4- Loi de composition externe (LCE)	130
K-espace vectoriel	
K-algèbre associative et unifière	
5- Terminologie	131
6- Etude détaillée des LCI	132
Partie stable	
Loi produit	
7- Quelques notations	135
X- GROUPES, ANNEAUX, CORPS	139 à 152
1- Etude élémentaire de la structure de groupe	139
Exemples de groupes à connaître	
Sous-groupes	
2- Etude élémentaire de la structure d'anneau	144
Calcul dans un anneau	
Eléments inversibles	
3- Etude élémentaire de la structure de corps	148
Un exemple de corps non commutatif: les quaternions	
Corps des fractions d'un anneau intègre	
XI- ESPACES VECTORIELS	153 à 168
1- Définition	153
Exemples d'espaces vectoriels à connaître	
2- Combinaisons linéaires	155
3- Sous-espace vectoriel	156
4- Famille libre de n vecteurs	158
5- Famille génératrice	161
6- Base d'un espace vectoriel	164
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base	
Dimension d'un espace vectoriel	
XII- LES HOMOMORPHISMES	169 à 180
1- Introduction	169
2- Quelques exemples	169
Homomorphismes de groupes	
Homomorphismes d'anneaux	
Homomorphismes de corps	
Applications linéaires	
Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes	
3- Rôle des isomorphismes en mathématique	173
4- Noyau d'un homomorphisme de groupes, d'une application linéaire	174
5- Matrice d'une application linéaire	176
6- Théorème de la dimension	179

EXERCICES

ENONCES (95 exercices)

181 à 194

CORRIGES

195 à 237

INDEX ALPHABETIQUE ET NOTATIONS

239